

М. Н. МАКСУМОВ, Ю. Н. МИШУРОВ

ДРЕЙФОВЫЕ ВОЛНЫ ПЛОТНОСТИ  
В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО  
ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ДИСКОВОЙ ГАЛАКТИКЕ

В случае плоской геометрии рассмотрены специфические для дифференциально вращающихся звездных систем дрейфовые волны плотности, играющие важную роль как в эволюции, так и в происхождении различных структурных образований в галактиках. При определенных модельных предположениях относительно системы рассматриваются медленные волны, что позволяет упростить исследование, применяя усредненное по эпциклическому движению кинетическое уравнение для функции фазового распределения звезд. Показана локальная неустойчивость системы по отношению к медленным дрейфовым волнам плотности.

DRIFT DENSITY WAVES IN A DIFFERENTIALLY ROTATING AXISYMMETRIC DISK GALAXY, by M. N. Maksumov and Yu. N. Mishurov. Drift density waves, which are specific for differentially rotating stellar systems and which are of great importance for both the evolution and the origin of various structural galactic formations, are considered in case of plain geometry. Slow waves are considered only, under certain model assumptions. This allows to simplify the investigation making use of the averaged epicyclic motion kinetic equation for stellar phase distribution function. Local overstability of a system with respect to slow drift density waves is shown.

1. В работе [1] изучены специфические для дифференциально вращающихся неоднородных звездных систем волны плотности, связанные с дрейфовым движением звезд, аналогичным дрейфовому движению заряженных частиц в электромагнитных полях (см., например, [2]). Важность мелкомасштабных волн этого типа для динамики и структуры звездных систем заключается в том, что их возбуждение вносит элемент нерегулярности в различные упорядоченные пространственные структуры, разрушая их, вызывает перераспределение массы и движения в системе. Крупномасштабные же дрейфовые волны могут иметь отношение к интерпретации спиральной структуры галактик в рамках волновой теории.

В работе [1] исследовались высокочастотные дрейфовые волны в быстро и слабо дифференциально вращающейся звездной системе с трехмерной геометрией. Ниже рассмотрены низкочастотные дрейфовые волны в осесимметричной дифференциально вращающейся звездной системе с плоской геометрией (бесконечно тонкий диск), что важно для многочисленного класса галактик. Имеются в виду относительные, с учетом допплеровского сдвига частоты.

Как и в работе [1], распространяющаяся по азимуту волна будет рассматриваться локально. Поэтому можно не учитывать краевые эффекты.

Аналитическое рассмотрение дрейфовых волн плотности из-за математических трудностей оказывается возможным, но лишь с дополнительными ограничениями, в предположении слабой пространственной неоднородности. Получающиеся при этом инкременты оказываются вследствие этого малыми. Экстраполяция полученных таким образом результатов на случай конечных пространственных градиентов угловой скорости вращения и функции фазовой плотности системы отчасти упирается в вопрос о характере неустойчивости — являет-

ся она абсолютной или конвективной. Медленность дрейфовых движений звезд свидетельствует в пользу абсолютного характера неустойчивости, поскольку ситуация аналогична потоку со средней направленной скоростью, меньшей, чем средняя тепловая скорость частиц (см., например, [3] и цитированную там литературу).

Другая сторона экстраполяции связана со справедливостью локального рассмотрения, т. е. с возможностью судить о поведении возмущения в целом по его поведению в малой окрестности фиксированной точки. Имея в виду приложения к теории спиральной структуры, мы исследуем неосесимметричные возмущения. Для неосесимметричных (спиральных) возмущений ситуация определяется углом их наклона.

При малых углах наклона  $i$  (случай тугой закрутки) мы имеем дело с мелкомасштабными по радиусу (т. е. вдоль направления неоднородности) возмущениями. Для мелкомасштабных возмущений, как известно, применимо лучевое (оптико-геометрическое) рассмотрение. И локальное приближение для него справедливо лишь в некоторых точках внутри области локализации возмущений.

При больших углах наклона  $i$ , когда, по-видимому, лишь и играют роль дрейфовые эффекты [1], мы имеем малый параметр, обратный тангенсу угла наклона  $\operatorname{tg} i$ , так как сам тангенс угла наклона в отличие от случая тугой закрутки велик. Это — случай крупномасштабных по радиусу возмущений. В этом случае локальное приближение совпадает с нулевым приближением по параметру  $(\operatorname{tg} i)^{-1}$ . Но так как последнее асимптотическое приближение, по-видимому, равномерное по параметру, то должно быть справедливо и локальное приближение для крупномасштабных возмущений, изучением которых мы и ограничимся. Именно в нулевом приближении по этому параметру и исследовались (в другой области частот) волны плотности в работе [1].

2. Рассмотрим дифференциальную вращающийся бесконечно тонкий неоднородный диск, состоящий только из звезд. Введем цилиндрические координаты  $(\rho, \varphi, z)$  с осью  $z$ , направленной вдоль оси вращения диска, и началом, совпадающим с центром вращения. Выделим круговую скорость и в пространстве скоростей используем полярные координаты  $(v_\perp, \alpha)$ . Угол  $\alpha$  фигурировать далее не будет, поскольку мы пользуемся кинетическим уравнением Больцмана, усредненным по эпизициальному движению (что справедливо для быстро и слабо дифференциально вращающихся систем), которое имеет вид [4]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{z} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} f \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \rho \left[ \Omega + \frac{1}{4} \frac{v_\perp^2}{z^2 \rho} \frac{d \Omega}{d \rho} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{z \rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right] f \right) + \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} \left( \frac{v_\perp^2}{4 z^2 \rho} \frac{d \Omega}{d \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} f \right) = 0, \quad (1)$$

где  $f(\rho, \varphi, v_\perp, t)$  — функция распределения звезд в фазовом пространстве,  $\psi(\rho, \varphi, t)$  — собственный гравитационный потенциал,  $\Omega(\rho)$  — угловая скорость вращения диска,  $z = 2 \Omega + \frac{1}{2} \rho \cdot \frac{d \Omega}{d \rho}$ . Аналогичное уравнение в связи с другой задачей использовано в работе [5], но без учета члена с азимутальным, из-за дифференциальности вращения, дрейфом<sup>1</sup>. Здесь часть гравитационного потенциала, урав-

<sup>1</sup> По этой причине в ней и не была обнаружена исследуемая в настоящей работе неустойчивость, хотя и было указано на существование ветви колебаний, связанных с дрейфом звезд под влиянием градиента их невозмущенной плотности.

новешенная центробежной силой, опущена. Из-за переопределения потенциала центробежная сила выпадает из коэффициентов уравнения.

Уравнение (1) описывает медленные по сравнению с периодом эпиклического движения процессы. Подробности его вывода имеются в работе [4], а также в работе [1]. Для медленных процессов скорости и ускорения должны быть вычислены в первом приближении в отличие от работы [1], где эти поправки опущены, как несущественные.

Поведение малых возмущений описывается линеаризованными уравнениями Больцмана и Пуассона. Линеаризуем (1), считая что равновесное состояние осесимметрично и что градиент потенциала уравновешен центробежной силой:

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} = \frac{\partial f^0}{\partial \varphi} = \frac{\partial \psi^0}{\partial \varphi} = \frac{\partial \psi^0}{\partial \rho} = 0,$$

где  $f^0$  и  $\psi^0$  — невозмущенные функции распределения и потенциал. Так как мы пользуемся приведенным потенциалом, из которого вычтена часть, компенсируемая центробежными силами, то предположение, что гравитационная сила сбалансирована центробежной, эквивалентно

$$\frac{\partial \psi^0}{\partial \rho} = 0.$$

Тогда для возмущенной части функции распределения, которую обозначим через  $f$ , получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\omega \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial f^0}{\partial \rho} + \left[ \Omega + \frac{v_{\perp}^2}{4 \omega^2 \rho} \frac{d \Omega}{d \rho} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{v_{\perp}}{4 \omega^2 \rho} \cdot \frac{d \Omega}{d \rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^0}{\partial v_{\perp}} = 0. \quad (2)$$

Уравнение Пуассона для возмущенного потенциала  $\psi$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -8 \pi G M \int_0^{\infty} f v_{\perp} d v_{\perp} \delta(z), \quad (3)$$

где  $\delta(z)$  —  $\delta$ -функция Дирака,  $G$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса звезды.

Нетрудно написать решение уравнения (3), используя разложение по собственным функциям оператора Лапласа, т. е. используя представление Фурье-Бесселя для  $f$  и разложение  $\delta(z)$  по плоским волнам. Найдя  $f$  из уравнения (2) и подставив в него выражение для потенциала  $\psi$ , можно свести задачу к интегральному уравнению, которое будет сингулярным одиородным уравнением Фредгольма второго рода. Однако его исследование довольно сложно. Поэтому целесообразно разнене искать локальные решения нашей задачи [6]. Найденное таким способом локальное дисперсионное уравнение позволяет исследовать проблему устойчивости и определить порядок частот и инкрементов.

Локальное решение (2—3) ищем в виде

$$f = f(\rho, v_{\perp}) e^{i(-\omega t + m \varphi)}, \quad (4)$$

$$\psi = \psi(\rho, z) e^{i(-\omega t + m \varphi)}, \quad (5)$$

считая возмущения крупномасштабными по радиусу, т. е. характеризующимися большим углом наклона [1].

Подставляя (4—5) в (3) и решая его с помощью Фурье-преобразований, находим следующее локальное решение:

$$\psi(\rho, z=0) = \frac{4 \pi^2 G M}{|m|} \int_0^{\infty} f v_{\perp} d v_{\perp}. \quad (6)$$

и  
же

дом  
ется  
сти  
ли-

ыми  
что  
ала

Так  
тена  
что  
итно

ую

(2)

же-  
бзуя  
ким  
для  
ко-  
рого  
об-  
аким  
вать  
в.

(4)

(5)

тери-  
обра-

(6)

Далее из (2) с помощью (4—6) получаем дисперсионное уравнение

$$1 = \frac{4\pi^2 GM}{z} \operatorname{sign} m \cdot \int_0^\infty \frac{\left( \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{v_\perp}{4z} \cdot \frac{d\Omega}{d\rho} \frac{\partial}{\partial v_\perp} \right) f^\circ v_\perp dv_\perp}{\omega - m\Omega - \frac{m}{4\pi^2 \rho} \frac{d\Omega}{d\rho} v_\perp^2}. \quad (7)$$

3. Дрейфовая неустойчивость является кинетической и обусловлена резонансным взаимодействием звезд системы и волны и связана с нулями в знаменателе в (7). (7) — дисперсионное уравнение типа

$$F(\omega_r - m\Omega + i\omega_i) = 0.$$

Предполагая неустойчивость слабой ( $\frac{d\Omega}{d\rho}$  мало), считаем  $\omega_i$  малой по сравнению с реальной частью  $\omega_r - m\Omega$ . Раскладывая дисперсионное уравнение по степеням  $\omega_i$

$$F(\omega_r - m\Omega + i0) + \frac{\partial F(\omega_r - m\Omega + i0)}{\partial(\omega_r - m\Omega)} \cdot i\omega_i + \dots = 0$$

$$F(\omega_r - m\Omega + i0) = F_r(\omega_r - m\Omega + i0) + iF_i(\omega_r - m\Omega + i0),$$

$$(2) \quad F_r(\omega_r - m\Omega + i0) = 0, \\ \text{и} \quad i = -\frac{F_i(\omega_r - m\Omega + i0)}{\partial F_r(\omega_r - m\Omega + i0)}, \quad (8)$$

(3)

Для  $f^\circ$  в виде максвелловской функции  $f^\circ = \frac{n(\rho)}{\pi v^2} e^{-\frac{v_\perp^2}{v^2}}$ , где  $n$  — поверхностная плотность, соотношения (8) принимают вид:

$$F_r = 1 - \chi \cdot Vp \int_0^\infty \frac{dn}{d\rho} - 2\beta n \cdot \xi \frac{e^{-\xi}}{\omega - \gamma \xi} d\xi, \quad (9)$$

$$F_i = \frac{\pi \chi}{\gamma} \cdot \int_0^\infty \left( \frac{dn}{d\rho} - 2\beta n \xi \right) e^{-\xi} \delta \left( \xi - \frac{\omega}{\gamma} \right) d\xi, \quad (10)$$

где введены следующие обозначения:  $\xi = v_\perp^2 / \bar{v}^2$ ,  $\omega = \omega_r - m\Omega$ ,  $\beta = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Omega}{d\rho}$ ,  $\gamma = \frac{m\beta}{\pi\rho} \bar{v}^2$ ,  $\chi = -\frac{2\pi GM}{z} \operatorname{sign} m$ .

Как видно из (9), для существования интеграла нуль в знаменателе должен компенсироваться нулем в числителе, т. е. при  $\xi = \frac{\omega z \cdot \rho}{m \beta \bar{v}^2}$  должно выполняться  $\frac{dn}{d\rho} = 2n \frac{\omega z \cdot \rho}{m \bar{v}^2}$ . Если считать, как это имеет место в реальных системах, что  $\frac{dn}{d\rho} < 0$ , то из последнего имеем  $\frac{\omega}{m} < 0$ . Это значит, что неустойчивыми будут волны, распространяющиеся вправо.

направления вращения, т. е. направленные в ту же сторону, что и дрейф звезд.

Поскольку в (9) в числителе стоит функция, быстро спадающая с возрастанием  $\xi$ , то существенный вклад в интеграл вносят лишь малые  $\xi$ . Тогда

$$F_r \approx 1 - \frac{\gamma}{\omega} \int_0^{\infty} \left( \frac{dn}{d\rho} - 2\beta n \xi \right) \left( 1 + \frac{\gamma}{\omega} \xi \right) e^{-\xi} d\xi \approx \\ \approx 1 - \frac{\gamma}{\omega} \left( \frac{dn}{d\rho} - 2\beta n + \frac{\gamma}{\omega} \frac{dn}{d\rho} \right) = 1 - \frac{A}{\omega} - \frac{B}{\omega^2},$$

где

$$A = \gamma \left( \frac{dn}{d\rho} - 2\beta n \right); \quad B = \gamma \frac{dn}{d\rho}.$$

Из  $F_r = 0$  имеем

$$\frac{\omega}{\omega} = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + B}.$$

Здесь выбираются  $\omega$ , удовлетворяющие условию  $\frac{\omega}{m} < 0$ . Наконец

$$\omega_i = -\frac{\pi \omega^3}{\gamma} \cdot \frac{\frac{dn}{d\rho} - 2\beta n \frac{\omega}{\gamma}}{\left( 2\gamma + \frac{\omega}{\gamma} \right) \frac{dn}{d\rho} - 2\beta n \frac{\omega}{\gamma}} \cdot e^{-\frac{\omega}{\gamma}}. \quad (11)$$

Величина  $\left( \frac{\omega}{\gamma} \right)$ , состоящая в показателе экспоненты, положительна. Поэтому из (11) следует, что  $\omega_i \rightarrow 0$  при  $\gamma \rightarrow 0$ .  $\omega_i$  будет положительной при  $m > 0$  в следующих случаях:

$$\left| \frac{dn}{d\rho} \right| < \left| 2\beta n \frac{\omega}{\gamma} \right|, \quad \left| \frac{dn}{d\rho} \right| > \left| \frac{2\beta n \frac{\omega}{\gamma}}{2\gamma + \frac{\omega}{\gamma}} \right|.$$

Первое неравенство отвечает положительности числителя и отрицательности знаменателя. Второе — отрицательности числителя и положительности знаменателя. Остающаяся в области отрицательных значений  $\frac{dn}{d\rho}$  щель связана с приближенностью рассмотрения, что хорошо известно в физике плазмы [7]. Таким образом,  $\frac{dn}{d\rho} < 0$  является локальным условием неустойчивости. Как известно, для диска, для которого центробежная сила примерно уравновешивает самогравитацию, имеет место именно такое распределение плотности, которое, конечно, является функционалом угловой скорости вращения [8]. Величина градиента плотности определяет степень неустойчивости. Наконец, замечаем еще раз, что и  $\omega$  и  $\omega_i$  обращаются в нуль с обращением в нуль градиентов  $n$  и  $\Omega$ . Следовательно, найденный тип волн действительно специфичен лишь для неодиородных систем.

Из выражения для  $\omega$  видно, что дрейфовые колебания гидродинамически устойчивы с данной степенью точности.

нап-  
рейф  
ощая  
лишь

Порядок  $\tilde{\omega}$  можно оценить из знаменателя дисперсионного со-  
отношения (7).

$$\tilde{\omega} \approx \frac{m}{4\zeta^2 \rho} \frac{d\Omega}{d\rho} \bar{v}^2 \sim \frac{\bar{v}^2}{4\Omega^2} \cdot \frac{\Omega}{\rho^2} \sim \frac{r^2}{\rho^2} \Omega,$$

где  $r = \frac{\bar{v}}{2\Omega}$ . Если на расстоянии  $\rho$  укладывается несколько  $r$ , то  
 $\tilde{\omega} \approx 0.1\Omega$  или на порядок меньше. Соответствующий инкремент при  
 $\omega > \gamma$  на порядок, два меньше частоты. Эти оценки справедливы, ко-  
нечно, лишь для слабых градиентов. Если дифференциальное враще-  
ние и неоднородность сильные, т. е. соответствующие градиенты ко-  
нечны, то инкремент становится порядка частоты волн [1].

Мы не рассматривали мелкомасштабные по радиусу возмущения. Для этого нужен другой асимптотический метод. Как уже отмечено вначале, возбуждение мелкомасштабных дрейфовых волн будет вно-  
сить в систему значительный элемент нерегулярности, разрушая упо-  
рядоченные пространственные структуры. К объяснению в рамках  
волновой теории крупномасштабной (по всему диску) спиральной  
структуре некоторых типов галактик могут иметь отношение именно  
рассмотренные нами волны с большим углом наклона их узора.

#### ЛИТЕРАТУРА

(11)

1. М. Н. Максумов. Бюлл. Ин-та астрофиз. АН Тадж. ССР, № 64, 3, 1974.
2. Д. В. Сивухин. В кн.: «Вопросы теории плазмы», Вып. 1. Атомиздат, М., 1963, 7; А. И. Морозов, Л. С. Соловьев. В кн.: «Вопросы теории плазмы», Вып. 2. Атомиздат, М., 1963, 177.
3. М. Н. Максумов. Астрон. журн., 44, № 4, 798, 1967.
4. Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев. В кн.: «Физика плазмы и проблемы термоядерных управляемых реакций». Т. 3. Изд-во АН СССР, 1958, 268.
5. Л. С. Марочник, Н. Г. Птицына. Астрон. журн., 46, № 4, 762, 1969.
6. А. А. Веденов, Е. П. Велихов и Р. З. Сагдеев. Nuclear Fusion, I, 82, 1962; А. А. Галеев. Журн. эксперим. и теорет. физ., 44, № 6, 1920, 1963.
7. А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев. Журн. эксперим. и теорет. физ., 44, № 3, 903, 1963.
8. А. Тооттэ. Astrophys. J., 138, No. 2, 385, 1963.

ица-  
оло-  
зна-  
хо-  
ется  
для  
цио,  
чно,  
гра-  
аме-  
шуль  
льно  
ина-