

М. Н. МАКСУМОВ

О КИНЕТИКЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ
ДРЕЙФОВЫХ ВОЛН ПЛОТНОСТИ
ПРИ ДОППЛЕР-ЭФФЕКТЕ

Рассмотрены квазилинейные эффекты, сопутствующие возбуждению дрейфовых волн плотности при эффекте Допплера. Показана адекватность квазилинейной модели возбуждения названных волн.

ON THE KINETICS OF THE DRIFT DENSITY WAVES EXCITATION BY DOPPLER EFFECT, by M. N. Maksumov. Quasilinear effects accompanying the drift density waves excited by Doppler effect are considered. The adequacy of the quasilinear model of the excitation of such waves is shown.

1. Введение. Эта работа продолжает систематическое исследование дифференциальных эффектов пекулярных движений звезд в дифференциально вращающихся галактиках [1—5]. Эти дифференциальные эффекты проявляются в изменении в пространстве (для осесимметричной системы вдоль радиуса) энергии пекулярного (эпциклического) движения звезд. Такое изменение энергии пекулярного движения приводит, в свою очередь, к появлению эффективной силы, обуславливающей дрейфовые движения звезд. При этих дрейфовых движениях звезд либо вследствие эффекта Черенкова [2, 3], либо вследствие эффекта Допплера [1] могут возбуждаться неосесимметричные волны плотности. Важность такого типа волн определяется, в частности, возможностью отождествления с ними спиральной структуры галактик.

Возбуждение волны плотности вследствие дрейфовых движений звезд (дрейфовых волн плотности) определяется взаимодействием поля волны со звездами фона, на котором развертывается волновой процесс. Правильно, по-видимому, считать это взаимодействие квазилинейным, полагая, что оно связано лишь с медленным изменением распределения звезд фона, а колебания фазового распределения и гравитационного поля в системе остаются линейными [6—10]. Таким образом, в квазилинейном приближении требуется медленность релаксации фона для сохранения условий эффективного возбуждения колебаний. И до тех пор, пока амплитуда колебаний остается достаточно малой (чтобы оказываемое ими влияние на параметры среды было слабым), справедливо квазилинейное рассмотрение. Поэтому основной задачей кинетики возбуждения дрейфовых волн плотности является исследование обратного влияния малых колебаний в системе на фазовое распределение звезд.

Для эффекта Черенкова (волны с малыми частотами) эта задача рассмотрена в работе [4]. Ниже она же рассмотрена для случая эффекта Допплера (волны высоких частот). Квазилинейный механизм обратного влияния колебаний при эффекте Допплера принципиально тот же, что и при эффекте Черенкова. Именно изменение фазового распределения звезд происходит вследствие дрейфа частиц в поле волны. Однако колебания гравитационного поля и фазовой плотности имеют более

сложный характер и вносят в процесс свою специфику. Как и в работах [1—4], рассмотрение является локальным и существенно ограничивается областью, близкой к плоскости симметрии системы [1].

2. Уравнение для функции фазовой плотности (в системе с неосесимметричными колебаниями). Рассмотрим дифференциально вращающуюся галактику с возбужденными в ней малыми неосесимметричными колебаниями. С оговорками, сделанными в конце введения, наше приближенное рассмотрение можно вести в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) конфигурационного пространства. Ось Oz направлена вдоль оси вращения галактики. Начало системы координат совпадает с центром вращения. В цилиндрических координатах угловая скорость вращения $\Omega = \Omega(\rho)$. Тогда уравнение для функции фазовой плотности $f = f(t, \rho, \varphi, z, v_\rho, v_\varphi, v_z)$ запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_\rho \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{v_\varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{v_\varphi^2}{\rho} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\rho} + \\ + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{v_\rho v_\varphi}{\rho} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь v_ρ, v_φ, v_z — проекции скорости звезд на оси цилиндрической системы координат, $\psi = \psi(t, \rho, \varphi, z)$ — собственный гравитационный потенциал галактики.

Выделим круговую скорость звезд и введем переменные остаточной скорости ($v_\perp = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2}$, $\alpha = \arctg v_\varphi / v_\rho$, v_z), где v_ρ, v_φ, v_z теперь обозначают проекции остаточной скорости на оси цилиндрической системы координат. Уравнение (1) примет при этом вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_\perp \cos \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} + \left(\frac{v_\perp \sin \alpha}{\rho} + \Omega \right) \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \\ + \left(\left[\frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \Omega^2 \cdot \rho \right] \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \rho \cdot \frac{d \Omega}{d \rho} v_\perp \sin 2\alpha \right) \frac{\partial f}{\partial v_\perp} + \\ + \left(- \left[\frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \Omega^2 \cdot \rho \right] \frac{\sin \alpha}{v_\perp} + \frac{\cos \alpha}{v_\perp} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{v_\perp \sin \alpha}{\rho} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \rho \cdot \frac{d \Omega}{d \rho} \cos 2\alpha \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha = 2\Omega + \frac{1}{2} \rho \cdot \frac{d \Omega}{d \rho}$.

Во введении уже отмечено, что квазилинейный механизм связан с дрейфом частиц в поле волны. Поэтому удобно выделить в уравнении (2) систематическое (линейное по полю) движение звезд в поле волны — гравитационный дрейф звезд.

Процедура выделения средней скорости в кинетическом уравнении (2) известна [11—13]. Она, однако, громоздка. Мы воспользуемся для выделения систематических эффектов приближенным асимптотическим методом [14]. С разной степенью точности систематические движения с помощью этого метода рассчитаны в работах [1—4].

Наиболее точный вид усредненных характеристик $\overline{\frac{dv_\rho}{dt}}, \overline{\frac{dv_\varphi}{dt}}, \overline{\frac{dv_z}{dt}}, \overline{\frac{dv_\perp}{dt}}$, $\overline{\frac{d\alpha}{dt}}, \overline{\frac{dv_z}{dt}}$ получен в работе [15], согласно которой интересующие нас дрейфы есть

$$\overline{\frac{dv_\rho}{dt}} = \frac{1}{\nu_\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad \overline{\frac{dv_\varphi}{dt}} = - \frac{1}{\nu_\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad \overline{\frac{dv_z}{dt}} = 0,$$

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{v_{\perp}}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \left(\frac{z}{2\rho} \right)}{\partial \rho}, \quad \frac{dz}{dt} = -z, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (3)$$

Обозначая остаточные скорости звезд с вычтеною из них дрейфовой скоростью снова через v_{\perp} , z , v_z , получим кинетическое уравнение для функции распределения f с выделенными круговой скоростью звезд и скоростью гравитационного дрейфа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot f \right) + v_{\perp} \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \cdot f \right) + \\ + \left(\frac{v_{\perp} \sin \alpha}{\rho} + \Omega \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \left(\frac{v_{\perp}^2}{\alpha^2} \Omega \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \times \right. \\ \times \left. \frac{\partial \left(\frac{z}{2\Omega} \right)}{\partial \rho} \cdot f \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \rho \frac{d\Omega}{d\rho} v_{\perp} \sin 2\alpha \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} + \\ + \left(- \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \cdot \frac{\sin \alpha}{v_{\perp}} + \frac{\cos \alpha}{[v_{\perp} \cdot \rho]} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{v_{\perp} \sin \alpha}{\rho} - \frac{1}{2} \rho \frac{d\Omega}{d\rho} \cos 2\alpha \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - \\ - z \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \end{aligned} \quad (2')$$

В уравнении (2') для удобства введен редуцированный гравитационный потенциал, т. е. потенциал, из которого вычтена часть, скомпенсированная центробежной силой, которая поэтому выпадает из уравнений. Для редуцированного потенциала сохранено прежнее обозначение. Для работы [1] гравитационный дрейф не выделялся в приведенной выше специальной форме. Такое выделение упрощает рассмотрение линейных и квазилинейных эффектов и обеспечивает корректный предельный переход к низкочастотным колебаниям [2, 3].

Уравнение (2') — основное для изучения динамики фазового распределения в звездной системе с возбужденными в ней неосесимметричными малыми колебаниями произвольной частоты.

Функцию распределения и потенциал такой системы можно разложить в ряд Фурье по φ :

$$\begin{aligned} f = f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (f_m e^{im\varphi} + f_{-m} e^{-im\varphi}), \\ \psi = \sum_{m=1}^{\infty} (\psi_m e^{im\varphi} + \psi_{-m} e^{-im\varphi}) \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь f_0 , f_m , ψ_m (в отличие от случая, рассмотренного в работе [4]), — также функции угла α . Вообще же коэффициенты написанных разложений — функции $(t, \rho, z, v_{\perp}, \alpha, v_z)$.

В разложении гравитационного потенциала отсутствует нулевой (не зависящий от угла φ) член ψ_0 . Так как мы пользуемся приведенным (редуцированным) потенциалом (см. выше), то используемое разложение равносильно предположению (вполне верному), что и в процессе медленного изменения осесимметричная часть истинного гравитационного потенциала системы сбалансирована центробежной силой при сохранении, в среднем, симметрии вдоль оси вращения.

При разложении в ряд Фурье произведения двух функций f_1 и f_2 полезно следующее соотношение для компоненты Фурье их произведения:

$$(f_1 \cdot f_2)_m = \sum_{m'} (f_{1, m-m'} \cdot f_{2, m'}) + \text{к. с.} \quad (5)$$

Умножаем каждый член уравнения (2') на $\frac{1}{2\pi} e^{-im\varphi}$ и интегрируем в интервале $(0, 2\pi)$ с использованием соотношений (4) и (5). Тогда для Фурье-компоненты функции распределения f_m получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial f_m}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\pi} \sum_{m'} i m' [\psi_{m'} \cdot \hat{f}_{m-m'} - \psi_{-m'} \cdot \hat{f}_{m+m'}] \right) + \\
 & + v_\perp \cos \alpha \cdot \frac{\partial f_m}{\partial \varphi} - \frac{i m}{\pi^2} \cdot \sum_{m'} \left[\frac{\partial \psi_{m'}}{\partial \varphi} \hat{f}_{m-m'} + \frac{\partial \psi_{-m'}}{\partial \varphi} \hat{f}_{m+m'} \right] + \\
 & + \left(\frac{v_\perp \sin \alpha}{\rho} + \Omega \right) i m \hat{f}_m + v_z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} \left(\frac{v_\perp^2}{\pi^2} \right) \cdot \frac{1}{\rho} \times \\
 & \times \frac{\partial \left(\frac{v_\perp}{2\rho} \right)}{\partial \rho} \cdot \sum_{m'} i m' [\psi_{m'} \hat{f}_{m-m'} - \psi_{-m'} \hat{f}_{m+m'}] \Big) + \\
 & + \cos \alpha \cdot \sum_{m'} \left[\frac{\partial \psi_{m'}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_{m-m'}}{\partial v_\perp} + \frac{\partial \psi_{-m'}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_{m+m'}}{\partial v_\perp} \right] + \\
 & + \frac{\sin \alpha}{\rho} \cdot \sum_{m'} i m' \left[\psi_{m'} \cdot \frac{\partial f_{m-m'}}{\partial v_\perp} - \psi_{-m'} \cdot \frac{\partial f_{m+m'}}{\partial v_\perp} \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \rho \frac{d \Omega}{d \rho} v_\perp \sin 2\alpha \cdot \frac{\partial f_m}{\partial v_\perp} - \frac{\sin \alpha}{v_\perp} \sum \left[\frac{\partial \psi_{m'}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial f_{m-m'}}{\partial \alpha} + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \psi_{-m'}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial f_{m+m'}}{\partial \alpha} \right] + \frac{\cos \alpha}{v_\perp \rho} \sum i m' \left[\psi_{m'} \cdot \frac{\partial f_{m-m'}}{\partial \alpha} - \psi_{-m'} \cdot \frac{\partial f_{m+m'}}{\partial \alpha} \right] - \\
 & - \frac{v_\perp \sin \alpha}{\rho} \frac{\partial f_m}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \rho \frac{d \Omega}{d \rho} \cos 2\alpha \frac{\partial f_m}{\partial \alpha} - z \cdot \frac{\partial f_m}{\partial \alpha} \\
 & + \sum \left[\frac{\partial \psi_{m'}}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_{m-m'}}{\partial v_z} + \frac{\partial \psi_{-m'}}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_{m+m'}}{\partial v_z} \right] = 0. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Суммирование по индексу m' ведется от 1 до ∞ .

3. Кинетика эволюции фона. Она описывается уравнением (2'), усредненным по углам φ и α . Результат усреднения (2') по φ получим, полагая $m=0$ в уравнении (6)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial f_\phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\pi} \sum_{m'} i m' [\psi_{m'} \hat{f}_{-m'} - \psi_{-m'} \hat{f}_{m'}] + v_\perp \cos \alpha \frac{\partial f_\phi}{\partial \varphi} + \right. \\
 & + v_z \cdot \frac{\partial f_\phi}{\partial z} + \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} \left(\frac{v_\perp^2}{\pi^2} \right) \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\frac{v_\perp}{2\rho} \right)}{\partial \rho} \cdot \sum_{m'} i m' [\psi_{m'} \hat{f}_{-m'} - \psi_{-m'} \hat{f}_{m'}] \Big) + \\
 & + \cos \alpha \cdot \sum_{m'} \left[\frac{\partial \psi_{m'}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_{-m'}}{\partial v_\perp} + \frac{\partial \psi_{-m'}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_{m'}}{\partial v_\perp} \right] + \frac{\sin \alpha}{\rho} \sum_{m'} i m' \times \\
 & \times \left[\psi_{m'} \cdot \frac{\partial f_{-m'}}{\partial v_\perp} - \psi_{-m'} \cdot \frac{\partial f_{m'}}{\partial v_\perp} \right] - \frac{1}{2} \rho \frac{d \Omega}{d \rho} v_\perp \sin 2\alpha \cdot \frac{\partial f_\phi}{\partial v_\perp} - \\
 & - \frac{\sin \alpha}{v_\perp} \sum_{m'} \left[\frac{\partial \psi_{m'}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial f_{-m'}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi_{-m'}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial f_{m'}}{\partial \alpha} \right] + \frac{\cos \alpha}{v_\perp \rho} \sum_{m'} i m' \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left[\psi_{m'} \cdot \frac{\partial f_{-m'}}{\partial \alpha} - \psi_{-m'} \cdot \frac{\partial f_{m'}}{\partial \alpha} \right] - \frac{v_{\perp} \sin \alpha}{\rho} \cdot \frac{\partial f_{\phi}}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \rho \frac{d \Omega}{d \rho} \cos 2\alpha \cdot \frac{\partial f_{\phi}}{\partial \alpha} - \\ - \times \frac{\partial f_{\phi}}{\partial \alpha} + \sum_{m'} \left[\frac{\partial \psi_{m'}}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_{-m'}}{\partial v_z} + \frac{\partial \psi_{-m'}}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_{m'}}{\partial v_z} \right] = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) следует решать разложением по степеням параметра неоднородности [10, 16]. Тогда в нулевом приближении члены с $\frac{\partial f_{\phi}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial f_{\phi}}{\partial v_{\perp}}$, $\frac{\partial f_{\phi}}{\partial \alpha}$ (кроме входящего с коэффициентом \times) можно опустить.

Можно опустить также члены с $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial v_z}$ с точностью до замены в функциональной зависимости f_{ϕ} соответствующего адиабатического инварианта [15] на интеграл энергии. Так будет выделен эффект дрейфов для локального изменения f_{ϕ} только. Усредняя по α , получим уравнение для изменения фазовой плотности вида

$$\frac{\partial \langle f_{\phi} \rangle}{\partial t} + \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\nu} \sum_m i m' [\psi_{m'} \cdot \dot{f}_{-m'} - \psi_{-m'} \cdot \dot{f}_{m'}] \right) \right\rangle + \\ + \left\langle \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \left(\frac{v_{\perp}^2}{\nu^2} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\frac{z}{2})}{\partial \rho} \cdot \sum_m i m' [\psi_{m'} \cdot \dot{f}_{-m'} - \psi_{-m'} \cdot \dot{f}_{m'}] \right) \right\rangle + \\ + \left\langle \cos \alpha \sum_{m'} \left[\frac{\partial \psi_{m'}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial f_{-m'}}{\partial v_{\perp}} + \frac{\partial \psi_{-m'}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial f_{m'}}{\partial v_{\perp}} \right] \right\rangle + \\ + \left\langle \frac{\sin \alpha}{\rho} \sum_{m'} i m' \left[\psi_{m'} \frac{\partial f_{-m'}}{\partial v_{\perp}} - \psi_{-m'} \frac{\partial f_{m'}}{\partial v_{\perp}} \right] \right\rangle - \\ - \left\langle \frac{\sin \alpha}{v_{\perp}} \sum_{m'} \left[\frac{\partial \psi_{m'}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial f_{-m'}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi_{-m'}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial f_{m'}}{\partial \alpha} \right] \right\rangle + \\ + \left\langle \frac{\cos \alpha}{v_{\perp} \cdot \rho} \sum_{m'} i m' \left[\psi_{m'} \cdot \frac{\partial f_{-m'}}{\partial \alpha} - \psi_{-m'} \cdot \frac{\partial f_{m'}}{\partial \alpha} \right] \right\rangle = 0. \quad (8)$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по α .

Уравнение (8) можно записать в следующей окончательной форме:

$$\frac{\partial \langle f_{\phi} \rangle}{\partial t} + \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\nu} \sum_m 2 m' \operatorname{Im} (\psi_{m'}^* \cdot \dot{f}_{m'}) \right] \right\rangle + \\ + \left\langle \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \left[\frac{v_{\perp}^2}{\nu^2} \sum_m 2 m' \operatorname{Im} (\psi_{m'}^* \cdot \dot{f}_{m'}) \right] \right\rangle + \left\langle \cos \alpha \times \right. \\ \times \sum_{m'} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \psi_{m'}^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial f_{m'}}{\partial v_{\perp}} \right) + \left. \left\langle \frac{\sin \alpha}{\rho} \sum_{m'} 2 m' \operatorname{Im} \left(\psi_{m'}^* \cdot \frac{\partial f_{m'}}{\partial v_{\perp}} \right) \right\rangle - \right. \\ - \left. \left\langle \frac{\sin \alpha}{v_{\perp}} \sum_{m'} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \psi_{m'}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial f_{m'}}{\partial \alpha} \right) \right\rangle + \right. \\ \left. + \left\langle \frac{\cos \alpha}{v_{\perp} \cdot \rho} \sum_{m'} 2 m' \operatorname{Im} \left(\psi_{m'}^* \cdot \frac{\partial f_{m'}}{\partial \alpha} \right) \right\rangle = 0. \quad (8')$$

Im , Re обозначают минимую и действительную части стоящего после них произведения, соответственно. Знак \times обозначает комплексное

сопряжение, $b = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \left(\frac{z}{\rho} \right)}{\partial \rho}$. Для дальнейших суждений относительно характера эволюции фоновой фазовой плотности необходимо знание явных выражений для колебаний функции распределения.

4. Колебания функции фазовой плотности. Они определяются, как и в работе [1], методом интегрирования по траекториям [17]. В разделе 2 настоящей работы уже отмечено, что уравнение (2') отличается от уравнения, использованного в работе [1] для расчета дрейфовых колебаний при Допплер-эффекте. Поэтому расчет колебаний приведен ниже относительно детально, хотя принципиально и не отличается от расчета, сделанного в работе [1].

Выделяя в уравнении (6) в суммах по m' члены с $m' = m \neq 0$ и пре-небрегая нелинейными членами, получим уравнение для малых колебаний функции фазовой плотности. Это уравнение удобно записать не для Фурье-амплитуд, а для каждого члена суммы (4), которые равны ампли-тудам, умноженным на соответствующий экспоненциальный фазовый множитель. Будем отличать их от Фурье-амплитуд дополнительным штрихом \tilde{f}_m , $\tilde{\psi}_m$. Тогда \tilde{f}_m удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'_m}{\partial t} + \frac{1}{z\rho} \cdot \frac{\partial \psi'_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial \rho} + v_\perp \cos \alpha \cdot \frac{\partial f'_m}{\partial \rho} + \left(\frac{v_\perp \sin \alpha}{\rho} + \Omega \right) \cdot \frac{\partial f'_m}{\partial \varphi} + \\ + v_z \cdot \frac{\partial f'_m}{\partial z} + \frac{v_\perp}{z^2} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\frac{z}{2\rho} \right)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \psi'_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial v_\perp} + \cos \alpha \cdot \frac{\partial \psi'_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial v_\perp} + \\ + \frac{\sin \alpha}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi'_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial v_\perp} - \frac{1}{2} \rho \frac{d\Omega}{d\rho} \cdot v_\perp \sin 2\alpha \cdot \frac{\partial f'_m}{\partial v_\perp} - \\ - \frac{\sin \alpha}{v_\perp} \frac{\partial \psi'_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial \alpha} + \frac{\cos \alpha}{v_\perp \cdot \rho} \frac{\partial \psi'_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial z} - \frac{v_\perp \sin \alpha}{\rho} \cdot \frac{\partial f'_m}{\partial \alpha} - \\ - \frac{1}{2} \rho \frac{d\Omega}{d\rho} \cos 2\alpha \cdot \frac{\partial f'_m}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial f'_m}{\partial z} + \frac{\partial \psi'_m}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial v_z} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Вдоль характеристик

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = v_\perp \cos \alpha, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_\perp \sin \alpha}{\rho} + \Omega, \quad \frac{dz}{dt} = v_z, \\ \frac{dv_\perp}{dt} = -\frac{1}{2} \rho \frac{d\Omega}{d\rho} v_\perp \sin 2\alpha, \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{v_\perp \sin \alpha}{\rho} - \\ - \frac{1}{2} \rho \frac{d\Omega}{d\rho} \cos 2\alpha - z, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

уравнение (9) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{df'_m}{dt} = -\frac{1}{z\rho} \frac{\partial \psi'_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial \rho} - \frac{v_\perp}{z^2} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\frac{z}{2\rho} \right)}{\partial \rho} \frac{\partial \psi'_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial v_\perp} - \\ - \cos \alpha \cdot \frac{\partial \psi'_m}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial v_\perp} - \frac{\sin \alpha}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi'_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial v_\perp} + \frac{\sin \alpha}{v_\perp} \cdot \frac{\partial \psi'_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial \alpha} - \\ - \frac{\cos \alpha}{v_\perp \rho} \cdot \frac{\partial \psi'_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial z} - \frac{\partial \psi'_m}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_\circ}{\partial v_z}. \end{aligned} \quad (11)$$

В работе [1] первые два члена правой части уравнения (11) были опущены.

Решение уравнения (11) записывается в форме временного интеграла вдоль характеристик

$$t'_m = \int_{-\infty}^t (\dots) dt'. \quad (12)$$

(...) обозначает правую часть уравнения (11), взятую вдоль характеристик, т. е. переменные под знаком интеграла следует считать следующими функциями времени, являющимися решениями системы (10) [1]:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 - \frac{v_{\perp 0}}{\chi} \sin(\alpha_0 - \chi t) + \frac{v_{\perp 0}}{\chi} \sin z_0, \\ \varphi &= \varphi_0 + \Omega t + \frac{v_{\perp 0}}{\rho_0 \left(\frac{z}{\chi^2} \right)} \cdot \frac{d \left(\frac{z}{\chi^2} \right)}{d \rho} t + \frac{v_{\perp 0}}{\chi \rho} \cos(\alpha_0 - \chi t) - \frac{v_{\perp 0}}{\chi \rho} \cos \alpha_0, \quad (13) \\ z &= z_0 + v_{z0} t, \\ v_z &= v_{z0}, \quad v_{\perp} = v_{\perp 0}, \quad \alpha = \alpha_0 - \chi t. \end{aligned}$$

Индекс «о» обозначает некоторые начальные значения координат звезды в фазовом пространстве.

Для упрощения вычислений правильно будет считать выполненным условие справедливости локального (по радиальной координате) приближения. Действительно, по локальному решению можно судить о поведении решения в целом, если это локальное решение устойчиво по отношению к выбору начальной точки на радиальной оси координат. Этот вопрос подробно обсуждался для волн в неоднородной плазме [10, 18–20]. В неоднородной системе можно ввести для волн лишь локальный «волновой вектор». Тогда, чтобы волны в пространственно неоднородной системе могли существовать, необходимо, чтобы не нарушались, существенно, амплитудные и фазовые соотношения в волне. Изменение амплитуды волны, связанное с переменностью в пространстве «волнового вектора», можно выразить через градиенты фоновых параметров. Оно оказывается малым, если названные градиенты малы по сравнению с пространственным изменением волнового вектора. Это последнее, конечно, также принимается малым. Поэтому, если из косвенных соображений известен приближенный закон изменения радиального «волнового числа» вдоль радиуса системы (например, ρ^{-n}), то локальное приближение будет справедливо при изменении параметров системы по такому же или более медленному закону.

При локальном рассмотрении можно пренебречь радиальными колебаниями звезд и их движением вдоль оси Z , а неосесимметрические возмущения с большим углом наклона i ($\operatorname{tg} i = \frac{k_\varphi}{k_\rho}$, $k_\varphi = \frac{m}{\rho}$, k_ρ – азимутальное и радиальное волновые числа) можно рассматривать в пределе $\operatorname{tg} i \rightarrow \infty$ и пренебречь радиальной компонентой гравитационной силы в поле волны. Заменим в правой части (11) $f_0 \rightarrow \langle f_0 \rangle$, которая уже не зависит от α . Наконец, будем считать возмущения распространяющимися в плоскости симметрии системы.

Тогда (11) упростится и примет вид

$$\begin{aligned} \frac{df'_m}{dt} &= -\frac{1}{\chi \rho} \frac{\partial \psi'_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial \rho} - \frac{v_{\perp}}{\chi^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \left(\frac{z}{\chi^2} \right)}{\partial \rho} \frac{\partial \psi'_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial v_{\perp}} - \\ &\quad - \frac{\sin \alpha}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi'_m}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial v_{\perp}}. \quad (11') \end{aligned}$$

При колебаниях поля вида $\psi'_m = \psi_m e^{i(m\varphi - \omega t)}$, где ψ_m — функция от ρ, z , колебания функции распределения определяются интегралом (12) с правой частью (11'). Функциями t' под знаком интеграла с учетом сделанных упрощений являются φ и α . Вид функций $\varphi(t')$ и $\alpha(t')$ определяется соответствующими уравнениями системы (13).

$$\begin{aligned} f'_m = & - \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{1}{z\rho} \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial \rho} i m \psi_m \exp \left[i \left(m\varphi_0 + m\Omega t' + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{m v_\perp^2}{2\rho z} \frac{\partial \ln \left(\frac{z}{2\rho} \right)}{\partial \rho} t' + \frac{m v_\perp}{\rho z} \cos(\varphi_0 - z t') - \frac{m v_\perp}{\rho z} \cos \alpha_0 - \omega t' \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{v_\perp}{2z\rho} \frac{\partial \ln \left(\frac{z}{2\rho} \right)}{\partial \rho} \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial v_\perp} i m \psi_m \exp [\dots] + \frac{im}{\rho} \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial v_\perp} \times \right. \\ & \left. \left. \times \psi_m \sin(\varphi_0 - z t') \exp [\dots] \right\} dt', \quad (12') \right. \end{aligned}$$

где $[\dots]$ обозначает показатель \exp , совпадающий с показателем \exp первого члена в (12'). Индексы у φ_0 и α_0 сохранены, чтобы избежать путаницы.

Для вычисления интеграла в (12') используем разложение

$$e^{iz \cos \chi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} i^s J_s(z) e^{-is\chi},$$

где $J_s(z)$ — функции Бесселя. Далее, выбирая за t — начальный момент, получим решение задачи в лагранжевых координатах.

Наконец, переходя к амплитудам f_m , имеем из (12')

$$\begin{aligned} f_m = & - \left[\frac{1}{z\rho} \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial \rho} + \frac{v_\perp}{z\rho} b \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial v_\perp} \right] \cdot m \psi_m \times \\ & \times \sum_{l,s} \frac{-i(s-l)\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)}{m\Omega - \omega + \frac{m v_\perp^2}{z\rho} b + s z} + \\ & + \frac{im}{2\rho} \cdot \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial v_\perp} \psi_m \cdot \left\{ \sum_{l,s} \frac{J_l(\zeta) J_s(\zeta) e^{i(s-l)\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-i(s-1-l)\alpha_0}}{m\Omega - \omega + \frac{m v_\perp^2}{z\rho} b + (s-1)z} - \right. \\ & \left. - \sum_{l,s} \frac{J_l(\zeta) J_s(\zeta) e^{i(s-l)\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-i(s+1-l)\alpha_0}}{m\Omega - \omega + \frac{m v_\perp^2}{z\rho} b + (s+1)z} \right\} \\ & \zeta = \frac{m v_\perp}{z\rho}, \quad b = \frac{1}{2} \frac{d \ln \left(\frac{z}{2\rho} \right)}{d\rho}. \quad (14) \end{aligned}$$

5. Квазилинейные процессы переноса и проблема возбуждения волн. Уравнения (8') и (14) при известной спектральной интенсивности колебаний $|\psi_m|^2$ полностью решают задачу об изменении фонового распределения звезд возбужденными в системе колебаниями.

Подставим (14) в (8') и усредним по x_0 , т. е. вычислим интегралы вида $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\alpha_0$. Видим, что

$$\begin{aligned} <\text{Im}(\psi_m^* f_m)> = m |\psi_m|^2 \left\{ \left(\frac{1}{\omega_p} \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial \rho} + \frac{v_\perp}{\omega_p} b \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial v_\perp} \right) \times \right. \\ & \times \text{Im} \sum_s \frac{J_s^2(\zeta)}{m v_\perp^2} + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial v_\perp} \text{Im} \sum_s \frac{\frac{2s}{\zeta} J_s^2(\zeta)}{\omega - m \Omega - \frac{m v_\perp^2}{\omega_p} b - s \omega} \Bigg\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Мы не будем вычислять другие средние в уравнении (8'), так как полное исследование этого уравнения не входит в задачу этой работы. Ограничимся лишь его качественным исследованием.

Уравнение (8') описывает квазилинейные процессы обмена энергией, моментом между частицами фона, а также изменения в их пространственном распределении (посредством возбуждаемых волн).

Среди звезд следует различать два кинематических их типа — резонансные и нерезонансные. Резонансные звезды имеют скорости, близкие к фазовой скорости волны. Прочие звезды образуют класс нерезонансных.

При неустойчивости распределения звезд, связанной с явлением фазового резонанса, резонансные звезды в целом ~~приобретают~~ теряют энергию и момент и возбуждают волны плотности. При этом их распределение меняется определенным образом за счет перераспределения энергии и момента между ними посредством волн плотности. Это изменение необратимо. Нерезонансные звезды приобретают в поле волны определенную кинетическую энергию и момент. Изменяется также и их фазовое распределение, хотя и обратимым образом.

Остановимся на изменениях в пространственном распределении звезд как наиболее важных (и характерных) при возбуждении дрейфовых волн плотности.

Согласно соотношению (15) уравнение (8') примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \frac{1}{\omega_{m'} s} \sum_s \frac{2m'^2}{\omega_p} |\psi_{m'}|^2 J_s^2(\zeta) \times \right. \\ & \times \text{Im} \left(\omega - m' \Omega - \frac{m' v_\perp^2}{\omega_p} b - s \omega \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial \rho} \Big\} + \dots \quad (16) \end{aligned}$$

Опущенные члены уравнения (16) содержат члены с перекрестными производными по ρ и v_\perp , со второй производной по v_\perp и так далее.

Уравнение (16) диффузионного типа с коэффициентом диффузии D вида (с точностью до усреднения по скоростям)

$$\begin{aligned} D = & -2 \sum_{m', s} \frac{m'^2}{\omega_p^2 \rho^2} |\psi_{m'}|^2 J_s^2(\zeta) \times \\ & \times \text{Im} \left(\omega - m' \Omega - \frac{m' v_\perp^2}{\omega_p} b - s \omega \right)^{-1}. \quad (17) \end{aligned}$$

При отрицательности коэффициента диффузии D уравнение (16) описывает пространственное уплотнение частиц; положительности — на-против, расплывание в пространстве. Первая ситуация имеет место для

$$D \sim \frac{\omega_i}{\omega_r^2 + \omega_i^2} + \pi \text{sign} \omega_i \delta(\omega_r - \omega_i) \quad (11)$$

$$\omega_r^2 \equiv (\omega_r - \dots)^2; \quad \omega_r = \text{Re} \omega, \quad \omega_i = \text{Im} \omega.$$

Чл
звезд ~~резонансной~~ области, вторая — для резонансных звезд, приобретающих энергию в поле волн.

Как хорошо известно из физики плазмы [21, 10], при процессах квазилинейной релаксации, описываемой уравнением (16), диффузии в собственном смысле не происходит. Полный поток для фоновых звезд в системе будет равен нулю. Самоуплотнение ~~резонансных~~ звезд фона в точности компенсируется уходом ~~резонансных~~ звезд из той же области конфигурационного пространства. Так что локальная пространственная плотность фонового вещества остается постоянной. Общего для системы перераспределения вещества не происходит. Налицо лишь пространственное перераспределение звезд разного кинематического (по отношению к волне) типа, обусловленное обменом энергией и угловым пекулярным моментом.

При $s=0$ и $\zeta \ll 1$ из формулы (17) получается коэффициент диффузии работы [4]. При произвольном s легко получить оценку коэффициента диффузии D , аналогичную полученной в работе [4]. Для этого нужно усреднить (17) по скоростям $v \perp$ и воспользоваться приближением, аналогичным сделанному при вычислении интеграла в дисперсионном уравнении в работе [1]. Тогда увидим, что временная шкала квазилинейных процессов оказывается большой по сравнению с характерными временами линейных колебаний даже для предельной амплитуды поля волны, когда мы принимаем дрейфовые скорости в поле волны (см. соотношения (3)) порядка скорости азимутального дрейфа вследствие дифференциальности вращения (см. второе соотношение системы (13)). А это и означает справедливость квазилинейной модели возбуждения дрейфовых волн плотности, о которой сказано во введении.

Как видно из формулы (14), ~~дополнительный~~ эффект Доппеля «работает» при $k_\varphi = \frac{m}{\rho} \gg r^{-1}$, т. е., по-видимому, в центральных областях системы. Как показано в работе [1], частоты, излучаемые, например, при нормальном Допплер-эффекте $\omega < m\Omega + \nu$. Значит волна с такой частотой, возбуждаемая локально, могла бы распространяться лишь в областях системы, где ее частота меньше частоты соответствующего линдбладовского резонанса. Этим она не отличается от волн, рассмотренных в работах [22]. В случае эффекта Черенкова критической областью является область коротации.

Наконец, последний вопрос, который должен быть обсужден, может ли энергия дифференциального вращения, заключенная в пекулярном движении, обеспечить возбуждение спирального узора. Как известно, требуется, чтобы потенциал спирального узора составлял несколько процентов регулярного потенциала системы для объяснения наблюдаемых сопутствующих феноменов.

Энергия пекулярного вращательного движения звезд U может быть оценена как $U \sim \mu \cdot \Omega \cdot \varphi = \frac{v^2}{z} \perp$ — угловой момент звезды на эпипарическую орбите, z — эпипарическая частота, Ω — угловая скорость вращения системы. Тогда энергия дифференциального вращения E , запасенная в таком движении, определится как разница в значениях U между двумя точками, находящимися на расстоянии Δl , т. е. $E \sim \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cdot \Delta l \sim \mu \cdot \frac{d\Omega}{d\rho} \cdot \Delta l$, если φ — адиабатический инвариант.

Эта оценка несколько занижена, как ясно из сопоставления с соотношениями (3), (13). Отсюда видно, что если Δl порядка L (L — характерная длина изменения Ω), то такая область могла бы служить областью локальной генерации спирального узора.

Таким образом, отождествление спиральной структуры с дрейфовыми волнами плотности допустимо энергетически, но существенно зависит от дисперсионных свойств звездной системы. Кинетика же возбуждения такого типа волн, по-видимому, правильно отражена в приведенном выше локальном анализе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Н. Максумов. Бюлл. Ин-та астрофиз. АН Тадж. ССР, № 64, 1974, стр. 3.
2. M. N. Maksumov. In: Proceed. First Europ. Astron. Meeting, Vol. 3, Springer-Verlag, Heidelberg, 1974, pp. 120—127.
3. М. Н. Максумов, Ю. Н. Мишурин. Бюлл. Ин-та астрофиз. АН Тадж. ССР, № 64, 1974, стр. 16.
4. М. Н. Максумов. Бюлл. Ин-та астрофиз. АН Тадж. ССР, № 64, 1974, стр. 22.
5. М. Н. Максумов. Бюлл. Ин-та астрофиз. АН Тадж. ССР, № 64, 1974, стр. 36.
6. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, 1, 82 (1961); (1962). Дополнение, ч. 2, стр. 465.
7. В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко. Журн. экспер. и теор. физ., 42, вып. 6, 1515, 1962.
8. W. E. Drummond, D. Pines. Nuclear Fusion, 1962, Supplement, Pt. 3, p. 1049.
9. Р. З. Сагдеев. В кн.: «Вопросы теории плазмы». Вып. 4, Атомиздат, М., 1964, стр. 20.
10. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 7, Атомиздат, М., 1973, стр. 3.
11. С. Чэмпмен, Т. Каулинг. Математическая теория неоднородных газов. ИЛ, М., 1960.
12. S. Chandrasekhar, A. Kaufman, K. Watson. Ann. Phys. (N.—Y.), 2, 435—470, 1957.
13. Н. Кролл. В кн.: Физика высокотемпературной плазмы. «Мир», М., 1972, стр. 112.
14. Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев. Украинск. матем. журнал, 7, № 1, 5, 1955; Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы и теория нелинейных колебаний. Физматгиз, 1963, § 25.
15. М. Н. Максумов. В кн.: Динамика галактик и звездных скоплений. «Наука», Алма-Ата, 1973, стр. 88.
16. Ю. А. Церковников. Журн. экспер. и теор. физ., 32, № 1, 67, 1957.
17. M. N. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker. Nuclear Fusion, 1962, Suppl. Pt. 1, 143.
18. А. Б. Михайловский. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 3, Атомиздат, М., 1963, стр. 141.
19. F. C. Hohn. Phys. Fluids, 8, No. 9, 1741, 1965.
20. L. D. Pearlstein. Phys. Fluids, 8, No. 9, 1743, 1965.
21. Б. Б. Кадомцев. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4, Атомиздат, М., 1964, стр. 188.
22. C. C. Lin, F. H. Shu. Astrophys. J., 140, No. 2, 646, 1964; Proc. Nat. Acad. Sci. (U. S. A.), 55, No. 2, 229, 1966; C. C. Lin, C. Yuan, F. H. Shu. Astrophys. J., 155, No. 3, 721, 1969; F. H. Shu. Astrophys. J., 160, 89, 99, 1970.