

УДК 521.22+524.3/4-32:531.01
ДВИЖЕНИЕ ЗВЕЗД В ОБЛАСТИ ЛИНДБЛАДОВСКИХ РЕЗОНАНСОВ В
ДИСКЕ С ВРАЩАЮЩИМСЯ БАРОМ
© 1994 Е.И.Иванникова, А.В.Иванов, М.Н.Максумов
Институт астрофизики, Душанбе, Таджикистан

Аннотация

Модифицированным методом усреднения найден особый тип квазипериодических решений уравнений движения звезд в диске с вращающимся баром в окрестностях линдбладовских резонансов. Он соответствует "биениям" по радиальной координате, которые могли бы обусловить возбуждение в линдбладовских резонансах длинной линовской моды. Периодически, колоколообразно меняются усредненные остаточная скорость, энергия и угловой момент звезды. С найденным решением можно работать вплоть до потери резонансом стационарного характера (в смысле Волосова и Моргунова). Результаты подтверждены численным экспериментом.

Key words: галактики: диски – галактики:линлладовские резонансы – галактики:бар – галактики: звездные орбиты

1 Введение

Главная особенность движений звезд в дифференциально вращающихся дисках при наличии возмущающих полей волн плотности проявляется в области линдбладовских резонансов и в области резонанса коротации. Исследовав движение звезд диска в тех аспектах, которые остались вне поля зрения Линдцен-Белла и Калнайса [1], мы надеемся убедить в важности нелинейных эффектов для механизма возникновения и поддержания крупномасштабного спирального узора.

Существующие волновые теории спиральной структуры не учитывают в полной мере существенно нелинейного характера звездной системы, как основного динамического фактора, который самосогласованным образом приспособливает движение звезд и волны плотности друг к другу. А нелинейность довольно четко проявляется в резонансах.

Ранее нами показано [2], что в области резонанса коротации раскачивается круговое движение, средняя орбита звезды. Как видно из изложенного ниже, в области линдбладовских резонансов изменяются эпициклы. Из-за взаимного влияния вынужденных и свободных колебаний звезда эти изменения имеют характер "биений". Поэтому для волн плотности возможны следующие нелинейные эффекты. Модулированные ими по амплитуде радиальные движения ("биения"), в свою очередь, могут возбуждать длинную (с длиной, большей начального эпициклического радиуса звезд) волну плотности в линдбладовских резонансах. А в резонансе коротации может раскачиваться медленная (низкочастотная) волна плотности за счет изменения средней круговой орбиты звезды, которая в нерезонансной области переходит в линовские гравитационно-акустические моды. Таким образом, резонансные движения звезд оказываются механизмом возбуждения и поддержания волн плотности в нелинейной динамической системе. Естественное объяснение при этом может получить и тип возбуждаемых волн в канонической теории Лина и Шу [3]. В работе [2] методом усреднения для двухчастотной системы

нами развита теория квазипериодических движений звезд в диске с вращающимся баром, исключая области линдбладовских резонансов. Здесь же мы хотим показать, что метод усреднения в модифицированном виде может применяться также успешно, как и гамильтоновская резонансная теория возмущений для квазипериодических колебаний. Данная работа завершает теорию квазипериодических движений звезд в диске с вращающимся баром.

Как показано в работе [4], построение асимптотической теории, основанной на усреднении по всем быстрым переменным, приводит к значительным трудностям, т.к. преобразование Крылова-Боголюбова содержит при этом быстрорастущие относительно времени t функции. Для преодоления подобных трудностей в работах [5,6] предложено описание резонансных явлений посредством введения новых "медленных" переменных (в нашем случае, суммы или разности фаз вынужденных и эпизиклических колебаний звезд) в исходных динамических уравнениях. Аналогичная техника преобразований использована в резонансной теории возмущений, развитой Чириковым [7] и другими авторами [8] для описания типичного поведения гамильтоновых систем вблизи резонансов.

В линдбладовских резонансах характер изменений переменных помимо медленных дрейфовых отличают "биения", колоколообразный вид. В них, возможно, меняется тип моды для волн плотности [3]. Этому сопутствует и иной характер квазипериодических движений звезд. Поэтому спивки с нерезонансным решением, как в коротации, нет. Это является физической причиной перехода к иному описанию в линдбладовских резонансах.

Точное знание пространственного положения резонансов, отсутствие заметных отклонений осредненных значений некоторых переменных от их стационарных значений значительно упрощает использование метода усреднения. Как показано ниже, у наших переменных (u , r и φ) такие отклонения будут второго порядка малости по обратной эпизиклической частоте довольно длительное время, если амплитуда возмущающего потенциала достаточно мала. Поэтому оказывается возможным упростить рассмотрение по сравнению с Волосовым и Моргуновым [5], исследовавших, кроме того, устойчивость стационарных резонансных режимов. Мы, после преобразования к "медленным" переменным, метод Крылова-Боголюбова-Зубарева [9] используем непосредственно в его одночастотной форме (с учетом изменений, внесенных авторами в [10]), поскольку нас интересуют именно квазипериодические решения, и мы рассматриваем стационарный резонансный режим только в устойчивой стадии, не очень близко к сепаратрисе.

Истинный линдбладовский резонанс проявляется в "раздувании" эпизикла, что было замечено еще Ситниковым [11] и Алексеевым [12], у которых в окрестности сепаратрисы в задаче трех тел у безмассового тела появлялись орбиты с произвольно большими и случайными значениями времен возврата и большой полуоси. В точном линдбладовском резонансе фаза эпизиклических и фаза вынужденных колебаний совпадают, что и приводит к "раздуванию" эпизиклов и деформированию почти круговой орбиты в сильно вытянутый эллипс.

Метод усреднения, как и любой метод последовательных приближений, является локальным. Мы ищем одновременные решения, но в разных точках диска. Найти единое решение уравнений движения звезд, удовлетворяющее одновременно всем областям диска, в принципе невозможно, поэтому для полного описания диска необходимо зна-

ние решений для трех областей: 1) нерезонансной, где необходимо применять двухчастотный метод усреднения, 2) коротационной области и 3) областей линдбладовских резонансов, в которых можно применять одночастотную схему. В областях 1) и 2) решение, как было показано в работе [2] сшивается гладко. Это объясняет, почему для волн плотности на коротации короткая и длинная моды имеют одинаковую асимптотику, т.е. их длины сравниваются. Асимптотически сшить решения 1) и 3) в принципе невозможно: во-первых, потому что решение типа 1) в линдбладовских резонансах имеет неустойчивую особенность типа полюса первого порядка, а во-вторых, (физическая причина) — эпизодические и вынужденные колебания звезд начинают сильно взаимодействовать, из-за чего короткая волна на линдбладовских резонансах затухает, а длинная возбуждается, т.е. они не просто трансформируются друг в друга, как на коротации, а имеют совершенно различную природу. С найденным нами решением для колебаний звезд можно работать вплоть до утраты резонансом стационарного характера [5]. Все это чрезвычайно важно для эволюции галактик в поле возмущения, а также для исследования возможного влияния, вследствие нелинейных эффектов, возникающих фазовых колебаний звезд (относительно регулярных) на само возмущение (если оно самосогласовано, т.е. волна плотности).

Резонансы являются, конечно, очагами неустойчивых движений. Вообще говоря, как следует из КАМ-теории [13–15], асимптотически устойчивые движения в динамических системах, подобных нашей, в принципе невозможны на большом интервале времени из-за поведения фазового объема (теорема Лиувилля). Устойчивость линеаризованной системы нейтральная. Методы классической теории устойчивости движения ничего не дают. Переход от регулярного движения к хаосу с ростом амплитуды возмущения (вынужденного и начального) происходит в окрестности нелинейных резонансов. Устойчивость движения звезд в диске с вращающимся баром будет исследована особо с помощью численного эксперимента, аналогичного выполненному в работе [16].

2 Исходные уравнения

Для исследования движения звезд в диске с вращающимся баром в области линдбладовских резонансов, используем постоянство разности фаз вынужденных ($m\varphi - \omega t$) и собственных (α) колебаний, что соответствует близости по абсолютной величине их частот. Для этого в уравнениях движения (1)–(4) работы [2] введем новую переменную

$$\chi = m\varphi - \omega t \mp \alpha. \quad (1)$$

Она отличается от χ , обозначавшей в работе [2] только фазу вынужденных колебаний, на величину $\mp\alpha$. Верхний знак соответствует внешнему линдбладовскому резонансу (OLR), нижний — внутреннему (ILR). χ является “медленной” переменной, т.к. в линдбладовских резонансах $m\Omega - \omega = \mp\kappa$, где m — целое число (в нашем случае равное 2), Ω , ω — частоты вращения диска и бара соответственно, $\kappa = 2\Omega(1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln \Omega}{d \ln r})^{1/2}$ — эпизодическая частота звезды.

Мы работаем в цилиндрических координатах r, φ в галактоцентрической системе отсчета. Для остаточных скоростей используются также цилиндрические координаты v_\perp, α [2].

Произведя замену (1) в уравнениях (1)–(4) работы [2], найдем, что преобразованные уравнения движения звезд имеют вид (см. ПРИЛОЖЕНИЕ):

$$\frac{dr}{dt} = v_{\perp} \cos \alpha, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= (m\Omega - \omega) \pm \kappa - \frac{1}{2v_{\perp}} \sin \chi R^- + \frac{1}{2v_{\perp}} R^+ \sin(\chi \pm 2\alpha) + \\ &+ \left[\frac{mv_{\perp}}{ar} \pm \left(\frac{v_{\perp}}{a^2 r} - \frac{v_{\perp} B}{4r} \right) \right] \sin \alpha \mp \frac{v_{\perp} B}{4r} \sin 3\alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{1}{2} R^- \cos \chi + \frac{1}{2} R^+ \cos(\chi \pm 2\alpha) + \frac{v_{\perp}^2 B}{4r} \cos \alpha - \frac{v_{\perp}^2 B}{4r} \cos 3\alpha, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\kappa \pm \frac{1}{2v_{\perp}} R^- \sin \chi \mp \frac{1}{2v_{\perp}} R^+ \sin(\chi \pm 2\alpha) - \\ &- \left(\frac{v_{\perp}}{a^2 r} - \frac{v_{\perp} B}{4r} \right) \sin \alpha + \frac{v_{\perp} B}{4r} \sin 3\alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь, как и раньше, введены следующие обозначения: Ψ — амплитудное значение редуцированного гравитационного потенциала, из которого вычтена часть, скомпенсированная вращением, $a = \frac{2\Omega}{\kappa}$, $B = \frac{1}{a^2} - 1 + \frac{d \ln a}{d \ln r}$, а также $R^- = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \mp \frac{am}{r} \Psi$ и $R^+ = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \pm \frac{am}{r} \Psi$

3 Общее решение модифицированным методом усреднения

Как указывалось выше, при замене (1) χ является медленной переменной и поэтому к системе (2)–(5) можно применять модифицированную одночастотную схему усреднения [10]. При этом полагается, что κ является большой величиной, по которой ведется усреднение, $d\Omega/dr$ и $d\kappa/dr$ порядка κ , а все остальные переменные — медленные, нулевого порядка по κ .

Система (2)–(5) имеет вид [10]:

$$\frac{dx_k}{dt} = \lambda \omega_k(x) + X_k(x, \alpha), \quad (6)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \lambda \omega(x) + A(x, \alpha). \quad (7)$$

Обозначения здесь введены такие же, как и в [9], только в данном случае $\omega = -\kappa$, $\omega_2 = m\Omega - \omega \pm \kappa$, $\omega_1 = \omega_3 = 0$, причем, сама ω_2 является величиной малой по сравнению с κ , а ее производные порядка κ . Учитывая это, после процедуры усреднения получим для дрейфов:

$$X_k^{(1)'} = X_k^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^3 \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial x_p \partial x_q} \widetilde{\xi_p^{(1)} \xi_q^{(1)}} + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_k}{\partial x_p} \widetilde{\xi_p^{(2)}}, \quad (8)$$

$$\Omega'_1 = \Omega_1 + \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \xi_{n,0}^{(2)}, \quad (9)$$

и для колебаний:

$$\xi_k^{(1)} = \frac{1}{\omega} \int \left(\sum_{n=1}^3 \frac{\partial \omega_k}{\partial x_n} \xi_n^{(1)} + X_k \right) d\alpha, \quad (10)$$

$$u_1 = \frac{1}{\omega} \int \left(A + \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \xi_n^{(1)} \right) d\alpha, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \xi_k^{(2)} = & \frac{1}{\omega} \int \left(\frac{\partial X_k}{\partial \alpha} u_1 + \sum_{n=1}^3 \frac{\partial X_k}{\partial x_n} \xi_n^{(1)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{n,q=1}^3 \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial x_n \partial x_q} \xi_q^{(1)} \xi_n^{(1)} + \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \omega_k}{\partial x_n} \xi_n^{(2)} \right) d\alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

В дрейфах X'_1 и Ω'_1 у $\xi_n^{(2)}$ — берется только неосциллирующая часть, (нулевая гармоника $\xi_{n,0}^{(2)}$). В формулах (8)–(9) $X_k^{(1)}$, Ω_1 — дрейфы, полученные в работе [9].

4 Решение в области линдбладовских резонансов

Для исходной системы (2)–(5), используя модифицированный метод усреднения (8)–(12), получим следующие решения:

для дрейфов —

$$X_1^{(1)} = 0, \quad (13)$$

$$X_2^{(1)} = mb \pm \kappa_1 - \frac{1}{2v_\perp} R^- \sin \chi, \quad (14)$$

$$X_3^{(1)} = \frac{1}{2} R^- \cos \chi, \quad (15)$$

$$\Omega_1 = -\kappa_1 \pm \frac{1}{2v_\perp} R^- \sin \chi, \quad (16)$$

(здесь b и κ_1 дрейфы из-за дифференциальности вращения для Ω и κ соответственно, найденные в [10], штрихи в обозначениях дрейфов опущены);

для колебаний первого порядка —

$$\xi_r^{(1)} = -\frac{v_\perp}{\kappa} \sin \alpha, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \xi_\chi^{(1)} = & \frac{v_\perp}{\kappa} \left[\frac{m}{ar} \pm \left(\frac{1}{a^2 r} - \frac{B}{4r} \right) \right] \cos \alpha - \frac{v_\perp}{\kappa^2} \frac{\partial(m\Omega - \omega \pm \kappa)}{\partial r} \cos \alpha \mp \\ & \mp \frac{v_\perp B}{12\kappa r} \cos 3\alpha \pm \frac{1}{4v_\perp \kappa} R^+ \cos(\chi \pm 2\alpha), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\xi_{v_\perp}^{(1)} = -\frac{v_\perp^2 B}{4\kappa r} \sin \alpha + \frac{v_\perp^2 B}{12\kappa r} \sin 3\alpha \mp \frac{1}{4\kappa} R^+ \sin \chi \pm 2\alpha, \quad (19)$$

$$u_1^{(1)} = \frac{v_\perp}{\kappa r} \left(\frac{d \ln \kappa}{d \ln r} - \frac{1}{a^2} + \frac{B}{4} \right) \cos \alpha + \frac{v_\perp B}{12 \kappa r} \cos 3\alpha - \\ - \frac{1}{4 v_\perp \kappa} R^+ \cos(\chi \pm 2\alpha); \quad (20)$$

для колебаний второго порядка —

$$\xi_r^{(2)} = \delta r^{(2)} \cos 2\alpha - \frac{R^+}{4\kappa^2} \cos(\chi \pm \alpha), \quad (21)$$

$$\xi_\chi^{(2)} = \frac{1}{2\kappa} \left\{ \frac{v_\perp^2}{2\kappa r} \sin 2\alpha \left[\frac{m}{ar} \left(\frac{4}{3} \frac{d \ln \kappa}{d \ln r} - \frac{1}{2} \frac{d \ln \Omega}{d \ln r} - 2 \right) - \right. \right. \\ - \frac{rm}{2\kappa} \frac{d^2 \Omega}{dr^2} + m \frac{2\kappa r}{v_\perp^2} \frac{d\Omega}{dr} \delta r^{(2)} \pm \frac{1}{a^2 r} \left(\frac{5}{3} B - \frac{1}{a^2} - 1 + \right. \\ \left. \left. + \frac{d \ln \kappa}{d \ln r} - 2 \frac{d \ln a}{d \ln r} \right) \mp \frac{7}{24} \frac{B^2}{r} \mp \frac{B}{r} \frac{d \ln \kappa}{d \ln r} \mp \frac{r}{2\kappa} \frac{d^2 \kappa}{dr^2} \pm 2 \frac{\kappa r}{v_\perp^2} \frac{d\kappa}{dr} \delta r^{(2)} \right] \pm \\ \pm \frac{1}{4} \sin 4\alpha \cdot \frac{v_\perp^2 B}{4\kappa r^2} \left[-3 \left(\frac{d \ln \kappa}{d \ln r} - \frac{1}{a^2} + \frac{B}{4} \right) - \frac{d \ln B}{d \ln r} + 1 \right] \mp \\ \mp \frac{1}{144} \frac{v_\perp^2 B^2}{\kappa r^2} \sin 6\alpha + \sin(\chi \pm \alpha) \cdot \frac{R^+}{\kappa r} \left[- \frac{\partial \ln R^+}{2\partial \ln r} - \frac{1}{a^2} + \frac{3B}{8} \mp \right. \\ \left. \mp \frac{ma}{2} \frac{d \ln \Omega}{d \ln r} \right] + \sin(\chi \mp \alpha) \frac{BR^+}{4\kappa r} + \frac{1}{6} \sin(\chi \pm 3\alpha) \frac{R^+}{\kappa r} \cdot \left[\frac{\partial \ln R^+}{\partial \ln r} + \right. \\ \left. + \frac{d \ln \kappa}{d \ln r} - \frac{1}{a^2} \pm ma \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) \right] - \frac{1}{5} \sin(\chi \pm 5\alpha) \cdot \frac{BR^+}{\kappa r} - \\ \left. - \frac{1}{4} \sin 2(\chi \pm 2\alpha) \cdot \frac{(R^+)^2}{4\kappa v_\perp^2} \right\}. \quad (22)$$

В этих уравнениях $\delta r^{(2)}$ — найденное авторами ранее [10] смещение центра эпипериодических колебаний от среднего значения радиуса, определяется ниже.

Таким образом, решения уравнений движения звезд для переменных r, χ, v_\perp, α с точностью до второго порядка по (κ^{-1}) будут иметь вид:

$$r = \bar{r} + \xi_r^{(1)} + \xi_r^{(2)} + \delta r^{(2)}, \quad (23)$$

$$\chi = \bar{\chi} + \xi_\chi^{(1)} + \xi_\chi^{(2)}, \quad (24)$$

$$v_\perp = \bar{v}_\perp + \xi_{v_\perp}^{(1)}, \quad (25)$$

$$\alpha = \bar{\alpha} + u_1^{(1)}, \quad (26)$$

где \bar{r} вследствие (13) есть константа, а $\bar{\chi}, \bar{v}_\perp$, и $\bar{\alpha}$, которые содержатся в колебательных слагаемых, находятся из системы уравнений

$$\frac{d\bar{\chi}}{dt} = m\Omega - \omega \pm \kappa + X_2^{(1)}, \quad (27)$$

$$\frac{d\bar{v}_\perp}{dt} = X_3^{(1)}, \quad (28)$$

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = -\kappa + \Omega_1. \quad (29)$$

Окончательно, решения для уравнений движения звезд в области линдбладовских резонансов в переменных r , φ , v_\perp , α имеют вид:

$$r = \bar{r} - \frac{R^+}{4\kappa^2} \cos(m\bar{\varphi} - \omega t) - \frac{\bar{v}_\perp}{\kappa} \sin \bar{\alpha} + \delta r^{(2)} \cos 2\bar{\alpha} + \delta r^{(2)}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \bar{\varphi} + \frac{R^+}{\kappa^2 \bar{r}} \frac{a}{2} \left(1 - \frac{d \ln \Omega}{2d \ln \bar{r}} \right) \cdot \sin(m\bar{\varphi} - \omega t) + \\ &+ \left(\frac{\bar{v}_\perp}{\kappa a \bar{r}} - \frac{\bar{v}_\perp}{\kappa^2} \frac{d\Omega}{d\bar{r}} \right) \cos \bar{\alpha} + \left(a_1 - \frac{1}{2\kappa} \frac{d\Omega}{d\bar{r}} \delta r^{(2)} \right) \sin 2\bar{\alpha} + \\ &+ \frac{1}{2\kappa} \left\{ \frac{1}{3} \frac{R^+}{\kappa \bar{r}} \cdot a \left(1 + \frac{1}{4} \frac{d \ln \Omega}{d \ln \bar{r}} \right) \sin(m\bar{\varphi} - \omega t \pm 2\bar{\alpha}) \pm \right. \\ &\left. \pm \frac{1}{6} \sin(m\varphi - \omega t \pm 2\alpha) \frac{a R^+}{\kappa r} \left(2 - \frac{1}{2} \frac{d \ln \Omega}{d \ln r} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\bar{\varphi}$, \bar{v}_\perp , $\bar{\alpha}$ находятся из системы уравнений

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = (\Omega + b) - \frac{1}{2\bar{v}_\perp} R^- \sin(m\bar{\varphi} - \omega t \mp \bar{\alpha}), \quad (32)$$

$$\frac{d\bar{v}_\perp}{dt} = \frac{1}{2} R^- \cos(m\bar{\varphi} - \omega t \mp \bar{\alpha}), \quad (33)$$

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = -(\kappa + \kappa_1) \pm \frac{1}{2\bar{v}_\perp} R^- \sin(m\bar{\varphi} - \omega t \mp \bar{\alpha}) \quad (34)$$

В уравнениях (30)–(31), согласно работе [2]:

$$\begin{aligned} \delta r^{(2)} &= \frac{\bar{v}_\perp^2}{4\kappa^2 \bar{r}} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{d \ln \kappa}{d \ln \bar{r}} \right), \\ b &= \frac{\bar{v}_\perp^2}{\kappa \bar{r}} \left(\frac{2 + a^2}{6a\bar{r}} \frac{d \ln \kappa}{d \ln \bar{r}} - \frac{1 - a^2}{2a\bar{r}} \right), \\ a_1 &= \frac{\bar{v}_\perp^2}{\kappa^2 \bar{r}^2} \frac{1}{4a} \left(\frac{B}{3} + 2 - \frac{d \ln \kappa}{d \ln \bar{r}} + \frac{a\bar{r}^2}{2\kappa} \frac{d^2 \Omega}{d\bar{r}^2} \right), \\ \kappa_1 &= \frac{\bar{v}_\perp^2}{8\kappa \bar{r}^2} \left\{ \frac{d}{d \ln \bar{r}} \left(\frac{d \ln \kappa}{d \ln \bar{r}} \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{d \ln \kappa}{d \ln \bar{r}} \right)^2 + 2 \left(\frac{d \ln \kappa}{d \ln \bar{r}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Как видно из соотношений, коэффициенты при свободных колебаниях во всех формулах совпадают с полученными ранее для двухчастотного случая и для коротации.

По v_\perp и α выписаны только дрейфовые члены, поскольку колебания в пространстве скоростей нас не интересуют, для подстановки в правые части (30) и (31) нужны только усредненные значения этих координат.

5 Обсуждение найденных решений и выводы

Полученные решения не имеют секулярных слагаемых. Из формулы (30) для радиальной координаты видно, что, в отличие от коротации (формула (16) работы [2]), изменение радиальной координаты идет по типу "биений". Хотя второе и третье слагаемые мало отличаются по частоте, у них сильно различаются амплитуды. Поэтому их сложение не может привести к биениям. Последние возникают за счет модуляции амплитуды третьего слагаемого из-за изменения скорости (формула (33)). Равенство амплитуд эпизиклических колебаний с вынужденными не достигается. Возможная асимметрия изменения δr в положительную и отрицательную сторону незначительна и связана с влиянием адвекции.

Движение по φ сложнее: к дрейфовым движениям (первое слагаемое в формуле (31)) добавляются "биения" (за счет роста \bar{v}_\perp у свободных эпизиклических колебаний). В согласии с работой [1], радиальные и азимутальные колебания вокруг круговой орбиты находятся в фазе. Как известно, азимутальное движение звезд подвержено *donkey*-эффекту, открытому Линден-Беллом и Калнайсом [1], что учитывает $\bar{\varphi}$. *Donkey*-эффект и адвективный перенос углового момента и энергии [1,17] носят знакопеременный характер, зависящий от азимутального положения частицы по отношению к бару. Периодически, колоколообразно меняются усредненные v_\perp , энергия и угловой момент звезды, вследствие чего частица участвует как в затухании, так и в раскачке волны.

Покажем солитоноподобность решения для \bar{v}_\perp на границе потери устойчивости. Пренебрегая в уравнении для дрейфа $\bar{\chi}$ (формула (27)) расстройкой частот $m\Omega - \omega \pm \kappa$, а также в уравнении для $X_2^{(1)}$ (формула (14)) дрейфами из-за дифференциальности вращения, найдем

$$\frac{d\bar{\chi}}{dt} = -\frac{1}{2v_\perp} R^- \sin \bar{\chi}, \quad (35)$$

поделив (35) на (28) получим

$$\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{v}_\perp} = -\frac{\operatorname{tg} \bar{\chi}}{\bar{v}_\perp}, \quad (36)$$

Это уравнение дает взаимосвязь изменения \bar{v}_\perp и $\bar{\chi}$:

$$\bar{v}_\perp |\sin \bar{\chi}| = \operatorname{const}. \quad (37)$$

С учетом того, что $\bar{\chi}$, согласно (35) меняется импульсообразно, получим такое же изменение \bar{v}_\perp . При $\bar{\chi} \rightarrow 0$, что соответствует приближению к точному резонансу, \bar{v}_\perp резко возрастает. Происходит "выдувание" эпизикала, о котором говорилось во введении. Если последовательными приближениями учесть в (27) отброшенные слагаемые, то получим конечное значение для \bar{v}_\perp в минимуме $\bar{\chi}$. Подставив

$$\bar{v}_\perp = \frac{\operatorname{const}}{|\sin \bar{\chi}|}$$

в уравнение (27), при условии минимума $\bar{\chi}$, найдем значение $\sin \bar{\chi}$

$$\sin^2 \bar{\chi}_{min} = 2 \left| \frac{m\Omega - \omega \pm \kappa + mb \pm \kappa_1}{R^-} \right|, \quad (38)$$

$\sin \bar{\chi}_{min}$ оказывается пропорционально $(R^-)^{-1/2}$, что соответствует канонической гамильтоновой теории возмущений [8, § 2.4a].

По мере приближения к сепаратрисе частота "биений" стремится к нулю, движение звезды теряет квазипериодический характер. Согласно же (30) рост r идет чисто колебательным образом, т.к. формально $\bar{v}_\perp \sim R^-t$ при $\chi \rightarrow 0$, то $r \sim \frac{t}{\kappa} \sin \alpha$. А в действительности должно иметь место солитоноподобное изменение r (см. выше). В непосредственной близости от сепаратрисы движение должно описываться методами стохастической динамики [8,15].

Результаты получены при достаточно широких предположениях. Для их проверки был поставлен численный эксперимент [16], цель которого — найти изменения со временем координат и скоростей звезд и подтвердить их согласие с асимптотической теорией. Результаты эксперимента будут опубликованы отдельно. Здесь же приводятся графики с результатами численного эксперимента для двух случаев исследования движения звезды в области линдбладовских резонансов, которые согласуются с физическим смыслом полученных результатов. На рисунках 1 и 2¹ по осям абсцисс отложено время в периодах оборота диска, по ординатам — отклонения: dr , $dvp = v_\perp - v_{\perp 0}$, $dfi = \varphi - \varphi_0 - \Omega t$, $dL = L - L_0$, $L = r^2 \cdot \dot{\varphi}$ — секторная скорость звезды, $fi0$ — начальный азимут частицы в радианах, $dr0$ — начальное отклонение по радиусу, A — амплитуда возмущения в единицах фонового потенциала, $r0$ — положение резонанса. Диск вращается по кеплеровскому закону.

Главным выводом этой работы является, что (как и в коротации [2]) в области линдбладовских резонансов могут существовать довольно длительное время (десятки оборотов диска) квазипериодические движения звезд, которые могли бы существенно влиять на спиральную структуру. Данное исследование вместе с работами [10] и [2] дает полное описание регулярных движений звезд во всех областях звездного диска, исключая лишь самые центры резонансов.

6 ПРИЛОЖЕНИЕ

Выше ссылки замыкаются на работе [10]. Приведенные в ней без вывода уравнения движения для звезд были получены стандартно, с помощью функции Лагранжа и с учетом кинематики неизотропного диска. Мы следовали К.Ф.Огородникову "Динамика звездных систем"(М.: Физматгиз, 1958, стр. 250-251). Воспроизведем вывод для удобства читателя.

Функция Лагранжа звезды $L = 1/2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \Psi(r, \varphi)$. $\Psi(r, \varphi)$ - положительный (!) гравитационный потенциал. Тогда ее уравнения Лагранжа

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$$

Здесь r, φ - цилиндрические координаты в галактоцентрической системе отсчета (ось Z совпадает с осью вращения диска).

¹ см. последнюю страницу

Введем физические, а не контравариантные скорости: $v_r = \dot{r}$, $V_\varphi = r\dot{\varphi}$. Тогда

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{V_\varphi^2}{r}, \quad \frac{dV_\varphi}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{v_r V_\varphi}{r}$$

Пусть, далее, $\Omega(r)$ - угловая скорость вращения, $\kappa^2 = 2\Omega(2\Omega + r(d\Omega/dr))$ - эпициклическая частота. Выделим в V_φ круговую скорость, а остаточную скорость v_φ заменим на v'_φ/a , где $a = 2\Omega/\kappa$. В итоге $V_\varphi = r\Omega + v'_\varphi/a$. Подстановка выражения для V_φ в уравнения движения звезды дает

$$\begin{aligned} \frac{dv_r}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} + \kappa v'_\varphi + \frac{v'_\varphi^2}{a^2 r}, \\ \frac{dv'_\varphi}{dt} &= \frac{a \partial \psi}{r \partial \varphi} - a\Omega v_r - \frac{v_r \cdot v'_\varphi}{r} + \frac{d\ln a}{dr} (v_r \cdot v'_\varphi) - av_r \frac{d(r\Omega)}{dr}, \end{aligned}$$

где осуществлен переход к редуцированному гравитационному потенциалу $\psi(r, \varphi)$, такому, что $\partial\Psi/\partial r + r^2\Omega = \partial\psi/\partial r$.

Цилиндрические координаты в пространстве остаточных скоростей $v_r, v'_\varphi, v_r = v_\perp \cos \alpha, v'_\varphi = v_\perp \sin \alpha$, преобразуют уравнения движения к виду

$$\begin{aligned} \cos \alpha \frac{dv_\perp}{dt} - v_\perp \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} + \kappa v_\perp \sin \alpha + \frac{v_\perp^2 \sin^2 \alpha}{a^2 r}, \quad (*) \\ \sin \alpha \frac{dv_\perp}{dt} + v_\perp \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{a \partial \psi}{r \partial \varphi} - 2a\Omega v_\perp \cos \alpha + \\ &+ \left(-\frac{1}{r} + \frac{d\ln a}{dr}\right) \cdot v_\perp^2 \sin \alpha \cos \alpha - ar \frac{d\Omega}{dr} v_\perp \cos \alpha \quad (**) \end{aligned}$$

Умножая первое из последних уравнений на $\cos \alpha$, а второе - на $\sin \alpha$ и складывая, получим уравнение для v_\perp с учетом, что

$$\kappa - 2a\Omega - ar \frac{d(\Omega)}{dr} = 0, \quad \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = 1/4(\cos \alpha - \cos 3\alpha).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha \frac{dv_\perp}{dt} - v_\perp \sin \alpha \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \alpha + \underline{\kappa v_\perp \sin \alpha \cos \alpha} + \\ &+ \frac{v_\perp^2}{a^2 r} \cdot \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ \sin^2 \alpha \frac{dv_\perp}{dt} + v_\perp \cos \alpha \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{a \partial \psi}{r \partial \varphi} \sin \alpha - \underline{2a\Omega v_\perp \cos \alpha \sin \alpha} + \\ &+ \left(-\frac{1}{r} + \frac{d\ln a}{dr}\right) \cdot v_\perp^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - ar \frac{d\Omega}{dr} v_\perp \cos \alpha \sin \alpha. \end{aligned}$$

При сложении подчеркнутые слагаемые слева и справа уничтожаются, и получится

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\alpha + \frac{a}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\sin\alpha + \frac{v_{\perp}^2}{r}\left(\frac{1}{a^2} - 1 + \frac{d\ln a}{d\ln r}\right)\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Преобразовав последнее слагаемое и введя сокращение
 $(1/a^2 - 1 + d\ln a/d\ln r) = B$, для v_{\perp} получаем уравнение работ [2, 10].
Если умножим (*) на $\sin\alpha$, а (***) на $\cos\alpha$ и вычтем (*) из (**), получим

$$\begin{aligned} v_{\perp}\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{a}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\cos\alpha - \underline{2a\Omega v_{\perp}\cos^2\alpha} + \\ &+ \left(-\frac{1}{r} + \frac{d\ln a}{dr}\right) \cdot v_{\perp}^2\sin\alpha\cos^2\alpha - \underline{ar\frac{d\Omega}{dr}v_{\perp}\cos^2\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\alpha - \\ &- \underline{\kappa v_{\perp}\sin^2\alpha} - \underline{\frac{v_{\perp}^2}{a^2r}\cdot\sin^3\alpha} = \\ &= -\kappa v_{\perp} + \frac{a}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\cos\alpha + \frac{v_{\perp}^2B}{r}\sin\alpha\cos^2\alpha - \frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\alpha - \frac{v_{\perp}^2}{a^2r}\cdot\sin\alpha \end{aligned}$$

Подчеркнутые слагаемые в сумме дают $-\kappa v_{\perp}$, также прибавлено и вычтено слагаемое $(v_{\perp}^2/a^2r)\cdot\sin\alpha\cos^2\alpha$. Положительное дало вклад в B , а отрицательное сложилось с $(-(v_{\perp}^2/a^2r)\cdot\sin^3\alpha)$. С учетом $\sin\alpha\cos^2\alpha = 1/4(\sin\alpha + \sin 3\alpha)$, для α получаем уравнение работ [2, 10].

Итак, в качестве исходных авторы используют уравнения движения звезд в диске с анизотропным (шварцшильдовским) распределением по скоростям [2, 10], в которых круговое и некруговое движения разделены:

$$dr/dt = v_{\perp}\cos\alpha, \quad (\text{П. 1})$$

$$d\varphi/dt = \Omega + (v_{\perp}/ar)\sin\alpha, \quad (\text{П. 2})$$

$$\begin{aligned} dv_{\perp}/dt &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + v_{\perp}^2B/4r\right)\cos\alpha + (a/r)(\partial\psi/\partial\varphi)\sin\alpha - \\ &- (v_{\perp}^2B/4r)\cos 3\alpha, \quad (\text{П. 3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\alpha/dt &= -\kappa + (a/v_{\perp}r)(\partial\psi/\partial\varphi)\cos\alpha - (1/v_{\perp})(\partial\psi/\partial r) + \\ &+ v_{\perp}/a^2r - v_{\perp}B/4r\sin\alpha + (v_{\perp}B/4r)\sin 3\alpha. \quad (\text{П. 4}) \end{aligned}$$

Выберем ψ в виде $\psi = \Psi(r)\cos(m\varphi - \omega t)$ и подставим в уравнения движения. Умножим (П. 2) на m и вычтем в нем справа и слева ω . Складывая и вычитая преобразованное таким образом уравнение (П. 2) для φ с уравнением (П. 4), свертывая произведения тригонометрических функций, получим уравнения (2)-(5) настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lynden-Bell D., Kalnajs A.J. // Month.Not.RAS, 1972, v.157, No.1, p.1–30.
2. Иванникова Е.И., Максумов М.Н. // Астрон.журн, 1994, т.71, N 2, 216–219.
3. Shu F.H. I, II. // Astrophys.J., 1970, v.160, No.1, p.89–112.
4. Гребенников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986, 256 с.
5. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебаний. М.: Изд-во МГУ, 1971.

6. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972, 360 с.
7. Чириков Б.В. // Атомная энергия, 1959, т.6, с.630.
8. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: "Мир", 1984. 528 с.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 1974.
10. Иванникова Е.И., Максумов М.Н.// Докл.АН Тадж.ССР, 1985, т.XXVIII, N 11, 631–634.
11. Ситников К.Н. // ДАН СССР, 1960, т.133, N2, с.303.
12. Алексеев В.М. // УМН, 1981, т.36, N 4, с.161.
13. Арнольд В.И. // Успехи мат.наук, 1963, т.18, вып.6, с.92–192.
14. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. 3-е изд. М.: "Наука", 1989. 472 с.
15. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: "Наука", 1988. 368 с.
16. Исследования по динамике и структуре спиральных галактик (отчет). ВНТИЦ. Инв. N 0291.024813. N гос. регистр. 01.86.066298 — Институт астрофизики АН Тадж.ССР. Иванникова Е.И., Иванов А.В., Максумов М.Н., Сахибов Ф.Х. Душанбе, 1990, 108 стр.
17. Goldreich P., Tremaine S. // Astrophys.J., 1979, v.233, N 3, 857–871.

The Star Motion at Lindblad Resonances in a Disk with a Rotating Bar,

by E.I.Ivannikova, A.V.Ivanov, and M.N.Maksumov

Аннотация

The specific type of quasi-periodic solutions of equations of the star motion at Lindblad resonances is found by modified averaging technique. In particular, it describes the radial pulsations which could cause the long Lin's mode excitation. The average residual velocity, energy, and angular momentum of a star are changed periodically with time, bell-shapely. The solutions are valid while the resonance is keeping the stationary nature according to Volosov and Morgunov. Results are confirmed by the numerical experiment.

Примечание. Статья была представлена в Астрономический журнал РАН в 1994 г., но не была принята к печати из-за отговорок рецензента и многолетней проволочки процесса рецензирования. Представляется, что результаты статьи, полученные в полярных, а не обобщенных координатах, полезны и наглядны при исследовании кинетики спиральных волн плотности в области линдбладовских резонансов.

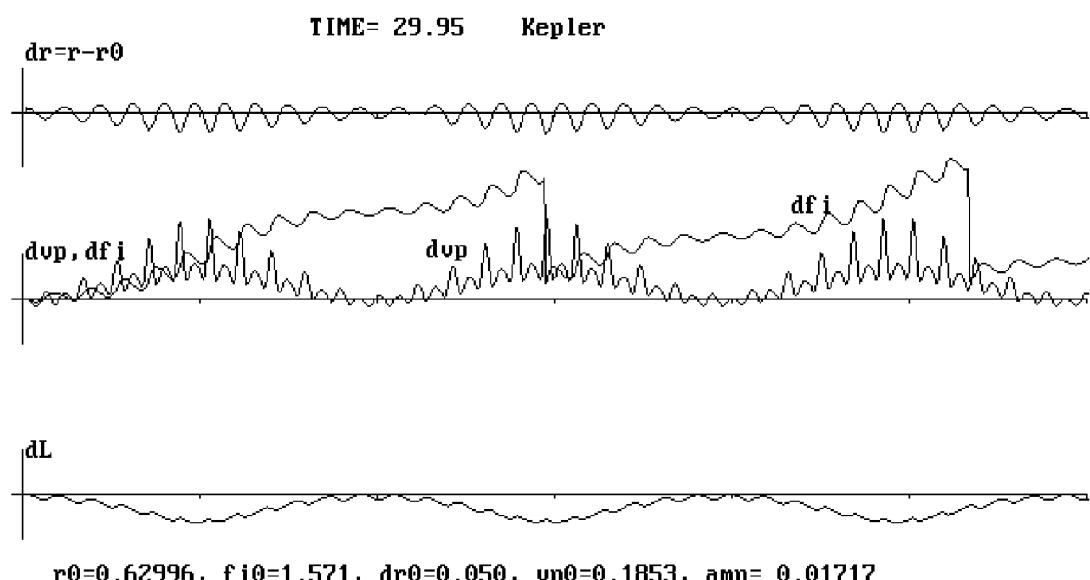


Рис.1. Движение частицы на внутреннем линдбладовском резонансе

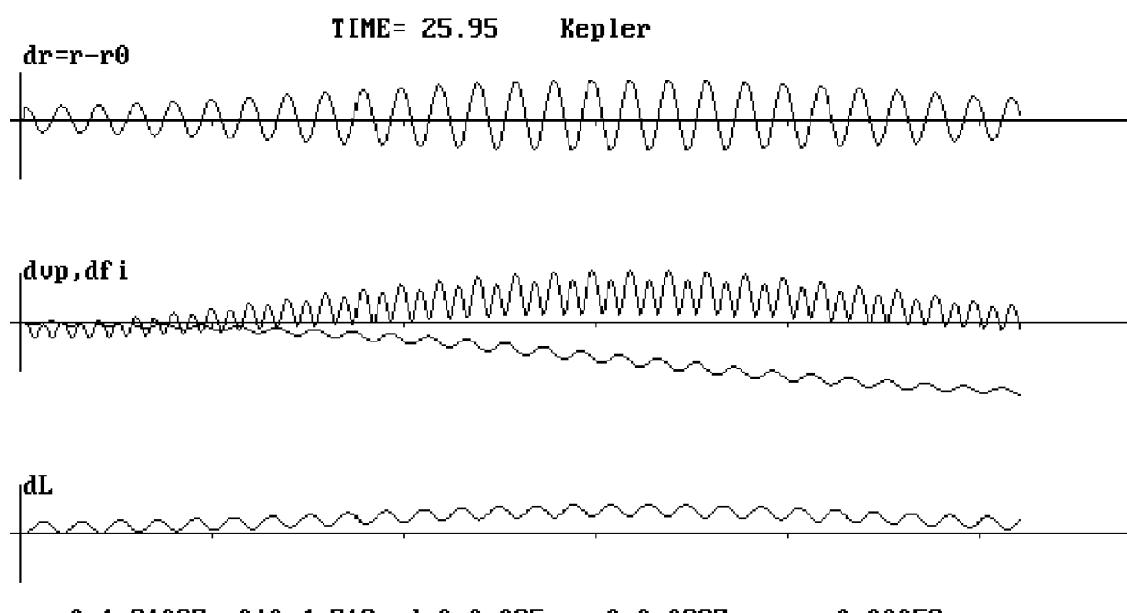


Рис.2. Движение частицы на внешнем линдбладовском резонансе