ДОКЛАДЫ АН РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
Том XXXVIII, N 1-2 , 1995.

УДК 521.22+524.3/4-32:531 АСТРОФИЗИКА

Е.И.ИВАННИКОВА,
член-корреспондент АН Республики Таджикистан
М.Н.МАКСУМОВ [1]

К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕЗД В ОБЛАСТИ ЛИНДБЛАДОВСКИХ РЕЗОНАНСОВ В ДИСКЕ С ВРАЩАЮЩИМСЯ БАРОМ

В работе [1] методом усреднения нами развита теория квазипериодических движений звезд в диске с вращающимся баром, исключая области линдбладовских резонансов. Здесь же мы хотим показать, что метод усреднения в модифицированном виде может применяться также успешно, как и гамильтоновская резонансная теория возмущений для квазипериодических колебаний. Данная работа завершает теорию квазипериодических движений звезд в диске с вращающимся баром.

В линдбладовских резонансах помимо медленных дрейфовых изменений переменных есть "биения". В них меняется тип моды для волн плотности [2]. Этому сопутствует и иной характер квазипериодических движений звезд. Поэтому сшивки с нерезонансным решением, как в коротации, нет. Это является физической причиной перехода к иному описанию в линдбладовских резонансах.

Как показано в работе [3], построение асимптотической теории, основанной на усреднении по всем быстрым переменным, приводит к значительным трудностям, т.к. преобразование

Крылова-Боголюбова содержит при этом быстрорастущие относительно времени t функции. Для преодоления подобных трудностей в работах [4,5] предложено описание резонансных явлений посредством введения новых “медленных"переменных (в нашем случае, суммы или разности фаз вынужденных и эпициклических колебаний звезд) в исходных динамических уравнениях. Аналогичная техника преобразований использована в резонансной теории возмущений, развитой Чириковым [6] и другими авторами [7] для описания типичного поведения гамильтоновых систем вблизи резонансов. Мы, после преобразования к “медленным"переменным, метод Крылова-Боголюбова-Зубарева [8] используем непосредственно в его одночастотной форме (с учетом изменений, внесенных авторами в [9]), поскольку нас интересуют именно квазипериодические решения, и мы рассматриваем стационарный резонансный режим только в устойчивой стадии, не очень близко к сепаратрисе.

Истинный линдбладовский резонанс проявляется в “раздувании"эпицикла, что было замечено еще Ситниковым [10] и Алексеевым [11], у которых в окрестности сепаратрисы в задаче трех тел у безмассового тела появлялись орбиты с произвольно большими и случайными значениями времен возврата и большой полуоси. В точном линдбладовском резонансе фаза эпициклических и фаза вынужденных колебаний совпадают, что и приводит к “раздуванию"эпициклов и деформированию почти круговой орбиты в сильно вытянутый эллипс.

Для исследования движения звезд в диске с вращающимся баром в области линдбладовских резонансов, используем постоянство разности (по абсолютной величине) фаз вынужденных $(m\varphi - \omega t)$ и собственных (α) колебаний, что соответствует близости по абсолютной величине их частот. Для этого в уравнениях движения (1)–(4) работы [1] введем новую переменную

$$\chi = m\varphi - \omega t \mp \alpha. \tag{1}$$

Она отличается от χ, обозначавшей в работе [1] только фазу вынужденных колебаний, на величину $\mp\alpha$. Верхний знак соответствует внешнему линдбладовскому резонансу (OLR), нижний — внутреннему (ILR). χ является “медленной"переменной, т.к. в линдбладовских резонансах $m\Omega - \omega = \mp\kappa$, где m — целое число (в нашем случае равное 2), Ω, ω — частоты вращения диска и бара соответственно, $\kappa = 2\Omega(1 + \frac{1}{2}\frac{d\ln\Omega}{d\ln r})^{1/2}$ — эпициклическая частота звезды.

Мы работаем в цилиндрических координатах r, φ в галактоцентрической системе отсчета. Для остаточных скоростей используются также цилиндрические координаты $v_\perp$, α [1,9].

Произведя замену (1) в уравнениях (1)–(4) работы [1], найдем, что преобразованные уравнения движения звезд имеют вид:

$$\frac{dr}{dt} = v_\perp \cos\alpha, \tag{2}$$

$$\frac{d\chi}{dt} = (m\Omega - \omega) \pm \kappa - \frac{1}{2v_\perp}\sin\chi R^- + \frac{1}{2v_\perp}R^+ \sin(\chi \pm 2\alpha) + \tag{3}$$

$$+ \left[\frac{mv_\perp}{ar} \pm \left(\frac{v_\perp}{a^2 r} - \frac{v_\perp B}{4r}\right)\right]\sin\alpha \mp \frac{v_\perp B}{4r}\sin 3\alpha,$$

$$\frac{dv_\perp}{dt} = \frac{1}{2}R^- \cos\chi + \frac{1}{2}R^+ \cos(\chi \pm 2\alpha) + \frac{v_\perp^2 B}{4r}\cos\alpha - \frac{v_\perp^2 B}{4r}\cos 3\alpha, \tag{4}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\kappa \pm \frac{1}{2v_\perp}R^- \sin\chi \mp \frac{1}{2v_\perp}R^+ \sin(\chi \pm 2\alpha) - \tag{5}$$

$$-\left(\frac{v_\perp}{a^2 r} - \frac{v_\perp B}{4r}\right)\sin\alpha + \frac{v_\perp B}{4r}\sin 3\alpha,$$

Здесь, как и раньше, введены следующие обозначения: Ψ — амплитудное значение редуцированного гравитационного потенциала, из которого вычтена часть, скомпенсированная вращением, $a = \dfrac{2\Omega}{\kappa}$, $B = \dfrac{1}{a^2} - 1 + \dfrac{d\ln a}{d\ln r}$, а также $R^- = \dfrac{\partial\Psi}{\partial r} \mp \dfrac{am}{r}\Psi$ и $R^+ = \dfrac{\partial\Psi}{\partial r} \pm \dfrac{am}{r}\Psi$

Как указывалось выше, при замене (1) χ является медленной переменной и поэтому к системе (2)–(5) можно применять модифицированную одночастотную схему усреднения [9]. При этом полагается, что κ является большой величиной, по которой ведется усреднение, $d\Omega/dr \quad d\kappa/dr$ порядка κ, а все остальные переменные — медленные, нулевого порядка по κ.

Для исходной системы (2)–(5), используя модифицированный метод усреднения работы [9], получим следующие решения:

для дрейфов —

$$X_1^{(1)} = 0, \tag{6}$$

$$X_2^{(1)} = mb \pm \kappa_1 - \frac{1}{2v_\perp} R^- \sin\chi, \tag{7}$$

$$X_3^{(1)} = \frac{1}{2} R^- \cos\chi, \tag{8}$$

$$\Omega_1 = -\kappa_1 \pm \frac{1}{2v_\perp} R^- \sin\chi, \tag{9}$$

(здесь b и κ_1 дрейфы из-за дифференциальности вращения для Ω и κ соответственно, найденные в [9], штрихи в обозначениях дрейфов опущены);

для колебаний первого порядка —

$$\xi_r^{(1)} = -\frac{v_\perp}{\kappa} \sin\alpha, \tag{10}$$

(11)
$$\xi_\chi^{(1)} = \frac{v_\perp}{\kappa}\left[\frac{m}{ar} \pm \left(\frac{1}{a^2 r} - \frac{B}{4r}\right)\right]\cos\alpha - \frac{v_\perp}{\kappa^2}\frac{\partial(m\Omega - \omega \pm \kappa)}{\partial r}\cos\alpha \mp$$
$$\mp \frac{v_\perp B}{12\kappa r}\cos 3\alpha \mp \frac{1}{4 v_\perp \kappa}R^+ \cos(\chi \pm 2\alpha),$$

(12)
$$\xi_{v_\perp}^{(1)} = -\frac{v_\perp^2 B}{4\kappa r}\sin\alpha + \frac{v_\perp^2 B}{12\kappa r}\sin 3\alpha \mp \frac{1}{4\kappa}R^+ \sin(\chi \pm 2\alpha),$$

(13)
$$u_1^{(1)} = \frac{v_\perp}{\kappa r}\left(\frac{d\ln\kappa}{d\ln r} - \frac{1}{a^2} + \frac{B}{4}\right)\cos\alpha + \frac{v_\perp B}{12\kappa r}\cos 3\alpha -$$
$$-\frac{1}{4 v_\perp \kappa}R^+ \cos(\chi \pm 2\alpha);$$

для колебаний второго порядка —

(14)
$$\xi_r^{(2)} = \delta r^{(2)}\cos 2\alpha - \frac{R^+}{4\kappa^2}\cos(\chi \pm \alpha),$$

(15)
$$\xi_\chi^{(2)} = \frac{1}{2\kappa}\left\{\frac{v_\perp^2}{2\kappa r}\sin 2\alpha\left[\frac{m}{ar}\left(\frac{4}{3}\frac{d\ln\kappa}{d\ln r} - \frac{1}{2}\frac{d\ln\Omega}{d\ln r} - 2\right) -\right.\right.$$
$$-\frac{rm}{2\kappa}\frac{d^2\Omega}{dr^2} + m\frac{2\kappa r}{v_\perp^2}\frac{d\Omega}{dr}\delta r^{(2)} \pm \frac{1}{a^2 r}\left(\frac{5}{3}B - \frac{1}{a^2} - 1 +\right.$$
$$\left.\left. + \frac{d\ln\kappa}{d\ln r} - 2\frac{d\ln a}{d\ln r}\right) \mp \frac{7}{24}\frac{B^2}{r} \mp \frac{B}{r}\frac{d\ln\kappa}{d\ln r} \mp \frac{r}{2\kappa}\frac{d^2\kappa}{dr^2} \pm 2\frac{\kappa r}{v_\perp^2}\frac{d\kappa}{dr}\delta r^{(2)}\right] \pm$$
$$\pm\frac{1}{4}\sin 4\alpha \cdot \frac{v_\perp^2 B}{4\kappa r^2}\left[-3\left(\frac{d\ln\kappa}{d\ln r} - \frac{1}{a^2} + \frac{B}{4}\right) - \frac{d\ln B}{d\ln r} + 1\right] \mp$$
$$\mp\frac{1}{144}\frac{v_\perp^2 B^2}{\kappa r^2}\sin 6\alpha + \sin(\chi \pm \alpha)\cdot\frac{R^+}{\kappa r}\left[-\frac{\partial \ln R^+}{2\partial\ln r} - \frac{1}{a^2} + \frac{3B}{8} \mp \frac{ma}{2}\frac{d\ln\Omega}{d\ln r}\right] +$$

$$+\sin(\chi \mp \alpha)\frac{BR^+}{4\kappa r} + \frac{1}{6}\sin(\chi \pm 3\alpha)\frac{R^+}{\kappa r} \cdot \left[\left(\frac{\partial \ln R^+}{\partial \ln r} + \frac{d \ln \kappa}{d \ln r} - \frac{1}{a^2} \right) \pm \right.$$

$$\left. \pm ma \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \right] - \frac{1}{5}\sin(\chi \pm 5\alpha) \cdot \frac{BR^+}{\kappa r} -$$

$$\left. -\frac{1}{4}\sin 2(\chi \pm 2\alpha) \cdot \frac{(R^+)^2}{4\kappa v_\perp^2} \right\}.$$

В этих уравнениях $\delta r^{(2)}$ — найденное авторами ранее [9] смещение центра эпициклических колебаний от среднего значения радиуса, определяется ниже.

Таким образом, решения уравнений движения звезд для переменных $r, \chi, v_\perp, \alpha$ с точностью до второго порядка по (κ^{-1}) будут иметь вид:

$$r = \bar{r} + \xi_r^{(1)} + \xi_r^{(2)} + \delta r^{(2)}, \tag{16}$$

$$\chi = \bar{\chi} + \xi_\chi^{(1)} + \xi_\chi^{(2)}, \tag{17}$$

$$v_\perp = \bar{v}_\perp + \xi_{v_\perp}^{(1)}, \tag{18}$$

$$\alpha = \bar{\alpha} + u_1^{(1)}, \tag{19}$$

где $\bar{r}$ вследствие (6) есть константа, а $\bar{\chi}$, $\bar{v}_\perp$, и $\bar{\alpha}$, которые содержатся в колебательных слагаемых, находятся из системы уравнений

$$\frac{d\bar{\chi}}{dt} = m\Omega - \omega \pm \kappa + X_2^{(1)}, \tag{20}$$

$$\frac{d\bar{v}_\perp}{dt} = X_3^{(1)}, \tag{21}$$

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = -\kappa + \Omega_1. \tag{22}$$

Окончательно, решения для уравнений движения звезд в области линдбладовских резонансов в переменных r, φ, $v_\perp$, α имеют вид:

$$r = \bar{r} - \frac{R^+}{4\kappa^2}\cos(m\bar{\varphi} - \omega t) - \frac{\bar{v}_\perp}{\kappa}\sin\bar{\alpha} + \delta r^{(2)}\cos 2\bar{\alpha} + \delta r^{(2)}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \varphi = \bar{\varphi} + \frac{R^+}{\kappa^2\bar{r}}\frac{a}{2}\left(1 - \frac{d\ln\Omega}{2d\ln\bar{r}}\right)\cdot\sin(m\bar{\varphi} - \omega t) + \\ + \left(\frac{\bar{v}_\perp}{\kappa a\bar{r}} - \frac{\bar{v}_\perp}{\kappa^2}\frac{d\Omega}{d\bar{r}}\right)\cos\bar{\alpha} + \left(a_1 - \frac{1}{2\kappa}\frac{d\Omega}{d\bar{r}}\delta r^{(2)}\right)\sin 2\bar{\alpha} + \\ + \frac{1}{2\kappa}\left\{\frac{1}{3}\frac{R^+}{\kappa\bar{r}}\cdot a\left(1 + \frac{1}{4}\frac{d\ln\Omega}{d\ln\bar{r}}\right)\sin(m\bar{\varphi} - \omega t \pm 2\bar{\alpha}) \pm \right. \\ \left. \pm\frac{1}{6}\sin(m\varphi - \omega t \pm 2\alpha)\frac{aR^+}{\kappa r}\left(2 - \frac{1}{2}\frac{d\ln\Omega}{d\ln r}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{24}$$

где $\bar{\varphi}$, $\bar{v}_\perp$, $\bar{\alpha}$ находятся из системы уравнений

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = (\Omega + b) - \frac{1}{2\bar{v}_\perp}R^-\sin(m\bar{\varphi} - \omega t \mp \bar{\alpha}), \tag{25}$$

$$\frac{d\bar{v}_\perp}{dt} = \frac{1}{2}R^-\cos(m\bar{\varphi} - \omega t \mp \bar{\alpha}), \tag{26}$$

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = -(\kappa + \kappa_1) \pm \frac{1}{2\bar{v}_\perp}R^-\sin(m\bar{\varphi} - \omega t \mp \bar{\alpha}) \tag{27}$$

В уравнениях (23)–(24), согласно работе [1]:

$$\delta r^{(2)} = \frac{\bar{v}_\perp^2}{4\kappa^2\bar{r}}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{d\ln\kappa}{d\ln\bar{r}}\right),$$

$$b = \frac{\bar{v}_\perp^2}{\kappa\bar{r}}\left(\frac{2+a^2}{6a\bar{r}}\frac{d\ln\kappa}{d\ln\bar{r}} - \frac{1-a^2}{2a\bar{r}}\right),$$

$$a_1 = \frac{\bar{v}_\perp^2}{\kappa^2\bar{r}^2}\frac{1}{4a}\left(\frac{B}{3} + 2 - \frac{d\ln\kappa}{d\ln\bar{r}} + \frac{a\bar{r}^2}{2\kappa}\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}^2}\right),$$

$$\kappa_1 = \frac{\bar{v}_\perp^2}{8\kappa\bar{r}^2}\left\{\frac{d}{d\ln\bar{r}}\left(\frac{d\ln\kappa}{d\ln\bar{r}}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{d\ln\kappa}{d\ln\bar{r}}\right)^2 + 2\left(\frac{d\ln\kappa}{d\ln\bar{r}}\right)\right\}.$$

Как видно из соотношений, коэффициенты при свободных колебаниях во всех формулах совпадают с полученными ранее для двухчастотного случая и для коротации.

По $v_\perp$ и α выписаны только дрейфовые члены, поскольку колебания в пространстве скоростей нас не интересуют, для подстановки в правые части (23) и (24) нужны только усредненные значения этих координат.

Полученные решения не имеют секулярных слагаемых. Из формулы (23) для радиальной координаты видно, что, в отличие от коротации (формула (16) работы [1]), изменение радиальной координаты идет по типу “биений". Хотя второе и третье слагаемые мало отличаются по частоте, у них сильно различаются амплитуды. Поэтому их сложение не может привести к биениям. Последние возникают за счет модуляции амплитуды третьего слагаемого изменением скорости (формула (26)). Пока величина скорости не становится большой, сохраняется режим “биений".

Движение по φ сложнее: к дрейфовым движениям (первое слагаемое в формуле (24)) добавляются “биения"(за счет роста $\bar{v}_\perp$ у свободных эпициклических колебаний). В согласии с работой [12], радиальные и азимутальные колебания вокруг круговой орбиты находятся в фазе. Азимутальное движение звезд подвержено *donkey*-эффекту, открытому Линден-Беллом и Калнайсом [12], что учитывает $\bar{\varphi}$. *Donkey*-эффект и адвективный перенос углового момента и энергии [12,13] носят знакопеременный характер, зависящий от азимутального положения частицы по отношению к бару. Периодически, колоколообразно меняются усредненные $v_\perp$, энергия и угловой момент звезды, вследствие чего частица участвует как в затухании, так и в раскачке волны.

Главным выводом этой работы является, что (как и в коротации [1]) в области линдбладовских резонансов могут существовать довольно длительное время (десятки оборотов диска) квазипериодические движения звезд, которые могли бы существенно влиять на спиральную структуру. Данное исследование вместе с работами [9] и [1] дает полное описание регулярных движений звезд во всех областях звездного диска, исключая центры резонансов.

С найденным нами решением для колебаний звезд можно работать вплоть до утраты резонансом стационарного характера [4]. Все это чрезвычайно важно для эволюции галактик в поле возмущения, а также для исследования возможного влияния, вследствие нелинейных эффектов, возникающих фазовых колебаний звезд (относительно регулярных) на само возмущение (если оно самосогласовано, т.е. волна плотности).

Институт астрофизики Академии
наук Республики Таджикистан

Поступило
1.VII.1994

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванникова Е.И., Максумов М.Н. - Астрон.журн, 1994, т.71, N 2, 216–219.

2. Shu F.H., I, II.- Astrophys.J., 1970, v.160, N 1, p.89–112.

3. Гребенников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986, 256 с.

4. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебаний. М.: Изд-во МГУ, 1971, 431 с.

5. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972, 360 с.

6. Чириков Б.В.- Атомная энергия, 1959, т.6, с.630.

7. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: “Мир", 1984. 528 с.

8. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 1974.

9. Иванникова Е.И., Максумов М.Н.- Докл.АН ТаджССР, 1985, т.XXVIII, N 11, 631–634.

10. Ситников К.Н.- ДАН СССР, 1960, т.133, N 2, с.303.

11. Алексеев В.М.- УМН, 1981, т.36, N 4, с.161.

12. Lynden-Bell D., Kalnajs A.J.- Month.Not.RAS, 1972, v.157, N 1, p.1–30.

13. G o l d r e i c h P., T r e m a i n e S.- Astrophys.J., 1979, v.233, N 3, p.857–871.

Е.И.ИВАННИКОВА, М.Н.МАХСУМОВ

ОИД БА НАЗАРИЯИ ҲАРАКАТИ СИТОРАҲО ДАР АТРОФИ РЕЗОНАНСҲОИ ЛИНДБЛАД ДАР ҚУРСИ ДОРОИ БАРИ ГАРДОН

Бо усули тагьирдодаи миёнагардонӣ типи нави квазипериодикии ҳалҳои муодилаҳои ҳаракати ситораҳо ба вуҷуди резонансҳои Линдблад дар қурси дорои бари гардон ёфта шудааст. Нисбат ба координатаи радиалӣ ҳал шакли “тапиш"дорад, ки он метавонад мавҷи дарози Линро ба ҳаракат оварад. Ҳалҳои ёфташуда то вақте, ки резонанс характери стационарӣ (дар маънои Волосов ва Моргунов) дорад, эътиборнок ҳастанд.

ON THE THEORY OF THE STAR MOTION AT LINDBLAD RESONANCES IN A DISK WITH A ROTATING BAR, by E.I.Ivannikova and M.N.Maksumov.

The specific type of quasi-periodic solutions of equations of the star motion at Lindblad resonances is found by modified averaging technique. In particular, it describes the radial bell-shapely pulsations which could cause the long Lin's mode excitation. The solutions are valid while the resonance is keeping the stationary nature according to Volosov and Morgunov.