ИЗВЕСТИЯ АН РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
Отделение физико-математических и химических наук, № 4(4) 1992 г.

УДК 521.22+524.3/4-32:531.01

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ДВУХЧАСТОТНОЙ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С РЕЗОНАНСОМ

Е. И. Иванникова, М. Н. Максумов

Развита формальная асимптотическая теория стационарных колебаний с точностью до второго порядка по малому параметру, за который принимается обратное значение наибольшей из частот. Теория основана на прямом применении метода усреднения для двухчастотной системы. Отдельно рассмотрены резонансный (резонанс коротации) и нерезонансный случаи. В резонансе движение вырождается в одночастотное, так как одно из колебаний приобретает дрейфовый характер. Решения получены в действительной тригонометрической форме, что необходимо для получения конкретных физических результатов.

1. Одним из эффективных методов, позволяющим упростить решение многих задач физики колебаний, является метод усреднения [1]. В большинстве небесномеханических задач астрономии и астрофизики, имеется, как правило, несколько собственных частот одного порядка и часто действует внешняя сила (создаваемая спутником или баром) с периодичностью, близкой к этим частотам. При появлении уже двух частот в системе появляются трудности, которых не было в одночастотных задачах, первоначально решавшихся методом Крылова-Боголюбова. Одна из них - найти решения в общем виде и с нужной точностью, пригодное во всех областях системы - в резонансах и вне их, в котором отсутствовали бы малые знаменатели, нарушающие сходимость асимптотических рядов. Применение метода усреднения к некоторым резонансным задачам рассматривалось в ряде работ (см. [2]-[4] и ссылки, данные там). В [2] предложен метод введения, в случае резонансов, дополнительных медленных переменных. Алгоритм усреднения рассмотрен для специально интересовавшего автора случая. В [3] дается общая постановка задачи и критерии существования решения и его устойчивости, поэтому здесь мы не будем касаться этих вопросов. Там же предложены методы решения в окрестности стационарных точек путем введения медленных частот ("расстроек") в резонансных областях, что до некоторой степени, аналогично работе [2], но отличается большей общностью расмотрения. В [4] намечена схема построения решений, пригодных в резонансных областях до первого порядка малости включительно. В данной работе, используя процедуру усреднения и преобразования Крылова-Боголюбова, развивается формальная аналитическая теория свободных и вынужденных стационарных колебаний до второго порядка малости по $(\omega_2)^{-1}$ (ω_2 - частота, по которой ведется усреднение, большой параметр) для

двухчастотной системы и, учитывая вырождение системы в резонансе коротации, выводятся уравнения для усредненных (дрейфовых) движений в резонансной области. Нетривиальность сформулированной задачи с точки зрения приложений к динамике звездных дисков (систем) состоит в том, что лишь во втором порядке малости разделяются такие усредненные (соотносительные) орбиты звезд, как сохраняющие угловой момент, и просто являющиеся центром эпициклических колебаний, по отношению к которым дрейфовые движения различаются [5]. Кроме того, слагаемые второго порядка входят и в выражения для вынужденных колебаний под влиянием возмущающих полей. Их вклад особенно существен в резонансных случаях. Поэтому все вычисления должны быть проведены с точностью до второго порядка. Эта задача до сих пор последовательно не была решена в явном виде. Достоинство метода усреднения состоит в том, что он включает в себя не только эффекты внешних силовых воздействий, но и параметрические эффекты в нелинейном приближении. Параметрические эффекты сказываются в соответствующих изменениях характеристических частот.

Решения даются в действительном тригонометрическом виде. Особое внимание уделяется колебательным слагаемым, в отличие от [3] и [4], где больше внимания уделяется вычислению дрейфов. Это связано с тем, что изменения координат под действием вынуждающей силы, которые необходимо найти во многих физических задачах, носят колебательный характер.

2. Рассмотрим систему вида:

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_i, \alpha_i)$$

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \lambda\omega_k(x_i) + A_k(x_i, \alpha_i) \tag{1}$$

(x_k - неугловые переменные, α_k - угловые переменные, i, k принимают значения 1, 2. λ - большой параметр). Резонансом будем называть состояние, в котором $p\omega_1 + n\omega_2 = 0$ (p и $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$). Причем здесь рассматривается такой режим, при котором не происходит изменения частот колебания системы при изменении их амплитуд под действием вынуждающей силы (т.е. ω_k - являются временными константами), т.е. стационарный режим. Необходимым условием применимости метода является требование "медленного" изменения всех параметров по сравнению с собственными частотами системы ω_k и частотой вынуждающей силы. Также, как и в методе Крылова-Боголюбова, решение ищем в виде усредненного движения - $\bar{x}_k$ и $\bar{\alpha}_k$ и быстрых колебаний - $\xi_k^{(n)}$ и $U_k^{(n)}$, т.е.

$$x_k = \bar{x}_k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} \xi_k^{(n)}(\bar{x}_i, \bar{\alpha}_i)$$

$$\alpha_k = \bar{\alpha}_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} U_k^{(n)}(\bar{x}_i, \bar{\alpha}_i) \tag{2}$$

С помощью такой подстановки систему (1) можно привести к виду:

$$\frac{d\bar{x}_k}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} X_k^{(n)}(\bar{x}_i)$$

$$\frac{d\bar{\alpha}_k}{dt} = \lambda\omega_k(\bar{x}_i) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n}\Omega_k^{(n)}(\bar{x}_i), \tag{3}$$

представляющему собой асимптотический ряд разложения по малому параметру (λ^{-1}) для дрейфовых движений.

Подставляем (2) и $X_k(x_i, \alpha_i)$, $A_k(x_i, \alpha_i)$, $\omega_k(x_i)$ в виде ряда вблизи точки $(\bar{x}_i, \bar{\alpha}_i)$ в (1). С учетом (3) имеем:

$$\sum_{l,n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda^n} X_k^{(n)} + \frac{1}{\lambda^n}\frac{\partial\xi_k^{(n)}}{\partial\bar{x}_i}\frac{1}{\lambda^l}X_i^{(l)} + \frac{1}{\lambda^n}\frac{\partial\xi_k^{(n)}}{\partial\bar{\alpha}_i}\left(\lambda\omega_i + \frac{1}{\lambda^l}\Omega_i^{(l)}\right) \right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ X_k + \frac{\partial X_k}{\partial\bar{\alpha}_i}\frac{1}{\lambda^n}U_i^{(n)} + \frac{\partial X_k}{\partial\bar{x}_i}\frac{1}{\lambda^n}\xi_i^{(n)} \right\} \tag{4}$$

$$\sum_{l,n=0}^{\infty} \left\{ \lambda\omega_k + \frac{1}{\lambda^n}\Omega_k^{(n)} + \frac{1}{\lambda^n}\frac{\partial U_k^{(n)}}{\partial\bar{x}_i}\frac{1}{\lambda^l}X_i^{(l)} + \frac{1}{\lambda^n}\frac{\partial U_k^{(n)}}{\partial\bar{\alpha}_i}\left(\lambda\omega_i + \frac{1}{\lambda^l}\Omega_i^{(l)}\right) \right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \lambda\omega_k + \frac{\partial\omega_k}{\partial\bar{x}_i}\frac{1}{\lambda^{n-1}}\xi_i^{(n)} + \frac{\partial^2\omega_k}{\partial\bar{x}_q\partial\bar{x}_i}\frac{1}{2\lambda^{l+n-1}}\xi_i^{(l)}\xi_q^{(n)} \right\}. \tag{5}$$

Здесь и дальше по всем повторяющимся индексам (кроме n и l) ведется суммирование - от 1 до 2. В дальнейшем все функции зависят уже от $\bar{x}_i$, $\bar{\alpha}_i$. Черта, означающая осредненое значение, писаться не будет.

В уравнения (4) и (5) подставим вместо X_k и A_k их разложения в виде двойных рядов Фурье

$$X_k = \sum_{p,n=-\infty}^{\infty} \mathrm{X}_{pn}^k e^{i(p\alpha_1 + n\alpha_2)} \tag{6}$$

$$A_k = \sum_{p,n=-\infty}^{\infty} \mathrm{A}_{pn}^k e^{i(p\alpha_1 + n\alpha_2)} \tag{7}$$

Выписывая из (4) и (5) соотношения для величин одного порядка малости, усредняя полученные уравнения по времени, а затем выделяя колебательные и дрейфовые члены, получим решения этой системы:

$$X_k^{(0)} = \mathrm{X}_{00}^k + \sum_{\substack{p,n=-\infty \\ (p\alpha_1 + n\alpha_2 = 0)}}^{\infty} \mathrm{X}_{pn}^k \tag{8}$$

$$\xi_k^{(1)} = \sum_{\substack{p,n=-\infty \\ (p\omega_1 + n\omega_2 \neq 0)}}^{\infty} \frac{\mathrm{X}_{pn}^k e^{i(p\alpha_1 + n\alpha_2)}}{i(p\omega_1 + n\omega_2)} \tag{9}$$

$$\Omega_k^{(0)} = \mathrm{A}_{00}^k + \sum_{\substack{p,n=-\infty \\ (p\alpha_1 + n\alpha_2 = 0)}}^{\infty} \mathrm{A}_{pn}^k \tag{10}$$

$$U_k^{(1)} = \sum_{\substack{p,n=-\infty \\ (p\omega_1 + n\omega_2 \neq 0)}}^{\infty} \frac{F_{pn}^k e^{i(p\alpha_1 + n\alpha_2)}}{i(p\omega_1 + n\omega_2)}, \tag{11}$$

$$\text{где}\quad F^k_{pn}=\sum_{\substack{r=1\\(p\omega_1+n\omega_2\neq 0)}}^{2}\left[\frac{\partial\omega_k}{\partial x_r}\frac{X^r_{pn}}{i(p\omega_1+n\omega_2)}+A^k_{pn}\right]$$

$$X^{(1)}_k=\sum_{r=1}^{2}\sum_{\substack{p,n=-\infty\\(p\omega_1+n\omega_2\neq 0)}}^{\infty}\left\{\frac{X^k_{pn}rF^r_{-p,-n}}{-(p\omega_1+n\omega_2)}-\frac{\frac{\partial X^k_{pn}}{\partial x_r}X^r_{-p,-n}}{i(p\omega_1+n\omega_2)}\right\},\tag{12}$$

$$\Omega^{(1)}_k=\sum_{q,r=1}^{2}\sum_{\substack{p,n=-\infty\\(p\omega_1+n\omega_2\neq 0)}}^{\infty}\left\{\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_k}{\partial x_q\partial x_r}X^q_{pn}X^r_{-p,-n}}{(p\omega_1+n\omega_2)^2}+\frac{A^k_{p,n}rF^r_{-p,-n}}{-(p\omega_1+n\omega_2)}-\frac{\frac{\partial A^k_{pn}}{\partial x_r}X^r_{-p,-n}}{i(p\omega_1+n\omega_2)}\right\}+$$

$$+\sum_{q=1}^{2}\frac{\partial\omega_k}{\partial x_q}\xi^{(2)}_{q,0},\tag{13}$$

$$\xi^{(2)}_k=\sum_{\substack{p,n,p',n'=-\infty\\(p\omega_1+n\omega_2\neq 0)\\(p'+p)\omega_1+(n'+n)\omega_2\neq 0}}^{\infty}\left\{D_k\frac{e^{i[(p'+p)\alpha_1+(n'+n)\alpha_2]}}{i[(p'+p)\omega_1+(n'+n)\omega_2]}+B_k\frac{e^{i(p\alpha_1+n\alpha_2)}}{i(p\omega_1+n\omega_2)}\right\},\tag{14}$$

$$\text{где}\quad D_k=\sum_{\substack{r=1\\(p'\omega_1+n'\omega_2\neq 0)}}^{2}\left\{\frac{irF^r_{p'n'}X^k_{pn}+\frac{\partial X^k_{pn}}{\partial x_r}X^r_{p'n'}}{i(p'\omega_1+n'\omega_2)}\right\}\quad\text{и}$$

$$B_k=\sum_{\substack{r,l=1\\(p\omega_1+n\omega_2\neq 0)}}^{2}\left\{\frac{\frac{-\partial X^k_{pn}}{\partial x_r}X^r_{p'n'(p'\alpha_1+n'\alpha_2=0)}}{i(p\omega_1+n\omega_2)}-\frac{rX^k_{pn}\Omega^{(0)}_r}{(p\omega_1+n\omega_2)}+\frac{X^k_{pn}X^{(0)}_l r\frac{\partial\omega_r}{\partial x_l}}{i(p\omega_1+n\omega_2)^2}\right\},$$

$$U^{(2)}_k=\sum_{s,q,r',r=1}^{2}\sum_{\substack{p,n,p',n'=-\infty\\(p\omega_1+n\omega_2\neq 0)\\(p'+p)\omega_1+(n'+n)\omega_2\neq 0}}^{\infty}\left\{-\frac{\partial\omega_k}{\partial x_s}\left\{D_s\frac{e^{i[(p'+p)\alpha_1+(n'+n)\alpha_2]}}{[(p'+p)\omega_1+(n'+n)\omega_2]^2}+\right.\right.$$

$$\left.+B_s\frac{e^{i(p\alpha_1+n\alpha_2)}}{(p\omega_1+n\omega_2)^2}\right\}+$$

$$+\left[\frac{r'F^{r'}_{pn}A^k_{p'n'}}{(p\omega_1+n\omega_2)}+\frac{\partial A^k_{p'n'}}{\partial x_r}X^r_{pn}\frac{1}{i(p\omega_1+n\omega_2)}\right]\cdot\frac{e^{i[(p'+p)\alpha_1+(n'+n)\alpha_2]}}{i[(p'+p)\omega_1+(n'+n)\omega_2]}-$$

$$-X^{(0)}_s\frac{\partial}{\partial x_s}\left[\frac{F^r_{p'n'}}{i(p'\omega_1+n'\omega_2)}\right]\frac{e^{i(p'\alpha_1+n'\alpha_2)}}{i(p'\omega_1+n'\omega_2)}+\Omega^{(0)}_{r'}\frac{r'F^k_{p'n'}e^{i(p'\alpha_1+n'\alpha_2)}}{(p'\omega_1+n'\omega_2)^2}-$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_k}{\partial x_q\partial x_r}\frac{X^q_{pn}X^r_{p'n'}e^{i[(p'+p)\alpha_1+(n'+n)\alpha_2]}}{i[(p'+p)\omega_1+(n'+n)\omega_2](p\omega_1+n\omega_2)(p'\omega_1+n'\omega_2)}\right\}.\tag{15}$$

Здесь и дальше выражения типа rF^r_{pn} раскрываются следующим образом:

$$rF^r_{pn}=pF^1_{pn}+nF^2_{pn}.$$

Выражение $(p'\alpha_1+n'\alpha_2=0)$, стоящее после нижнего индекса, говорит о том, что p' и n' берутся такими, чтобы выполнялось это равенство для любых α_1 и α_2. Кроме того, в знаменателях выражений (9)-(15) стоят линейные комбинации типа $p\omega_1 + n\omega_2$, которые получаются при допущении упрощающего предложения, для фаз Фурье-разложений (6)-(7), что

$$\frac{d\bar{\alpha}_k}{dt} = \lambda\omega_k(\bar{I}_i)$$

(ср. со вторым уравнением (3)). Фаза при этом заменяется ее приближенным значением $\bar{\alpha}_k = \lambda\omega_k t$. Такое допущение правомерно для быстро меняющейся фазы. Но вблизи резонансов, где такая фаза обращается в ноль, пренебрегать отброшенными добавками уже нельзя. В отличие от стандартного метода Боголюбова нами подразумевалось, что нулевая гармоника у $\xi_k^{(n)} \neq 0$. Из данных уравнений эта величина не определяется, но для каждой конкретной задачи ее можно определить из дополнительных условий. Таким образом, считая эту величину свободным параметром, для остальных 8 величин имеем 8 уравнений. К дрейфовым будем относить слагаемые, не содержащие колебаний ни по α_1, ни по α_2, аналогично тому, как это сделано в работе [6].

Следует также обратить внимание на то, что дрейфы выписаны с точностью до первого порядка, а колебательные члены - до второго. Здесь нет никакого противоречия, поскольку дрейфы - скорости, являющиеся функциями (ωt), и при нахождении переменной $x_k = \int X_k^{(1)}(\omega t)dt$ порядок по ω^{-1} увеличивается. Колебательные же члены - это быстрые изменения самих координат. Поэтому порядок их (дрейфов и колебательных членов) в x_k будет одинаковым.

Выражения (8)-(15) - решение системы (1) в комплексном виде. Приведенные здесь колебательные слагаемые второго порядка - не просто улучшение точности метода усреднения. Именно в $\xi_k^{(2)}$ и $U_k^{(2)}$ входят вынужденные слагаемые, которые отсутствуют в первом приближении [1], что в задачах о движении тел под действием периодической силы имеет особое значение.

3. Для получения конкретных физических результатов от компактной комплексной формы записи решений требуется перейти к вещественным значениям. Для этого нужно заменить комплексные ряды Фурье (6)-(7) их двойными рядами в тригонометрической записи. Имеем следующие формулы перехода для комплексных коэффициентов Фурье, для X_k:

$$X_k = \sum_{p,n=0}^{\infty} \left\{ a_{pn}^k \cos p\alpha_1 \cos n\alpha_2 + b_{pn}^k \sin p\alpha_1 \cos n\alpha_2 + \right.$$
$$\left. + c_{pn}^k \cos p\alpha_1 \sin n\alpha_2 + d_{pn}^k \sin p\alpha_1 \sin n\alpha_2 \right\},$$

для A_k: (16)

$$A_k = \sum_{p,n=0}^{\infty} \left\{ A_{pn}^k \cos p\alpha_1 \cos n\alpha_2 + B_{pn}^k \sin p\alpha_1 \cos n\alpha_2 + \right.$$
$$\left. + C_{pn}^k \cos p\alpha_1 \sin n\alpha_2 + D_{pn}^k \sin p\alpha_1 \sin n\alpha_2 \right\}.$$

Коэффициенты X^{k}_{pn} и A^{k}_{pn} комплексных форм (6) и (7) (они пишутся прямым латинским шрифтом) выражаются через коэффициенты, присутствующие в (16), следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}^{k}_{pn} &= \frac{\lambda_{pn}}{4}(a^{k}_{pn} - ib^{k}_{pn} - ic^{k}_{pn} - d^{k}_{pn}) \\
\mathrm{X}^{k}_{-p,-n} &= \frac{\lambda_{pn}}{4}(a^{k}_{pn} + ib^{k}_{pn} + ic^{k}_{pn} - d^{k}_{pn}) \\
\mathrm{X}^{k}_{p,-n} &= \frac{\lambda_{pn}}{4}(a^{k}_{pn} - ib^{k}_{pn} + ic^{k}_{pn} + d^{k}_{pn}) \\
\mathrm{X}^{k}_{-p,n} &= \frac{\lambda_{pn}}{4}(a^{k}_{pn} + ib^{k}_{pn} - ic^{k}_{pn} + d^{k}_{pn})
\end{aligned}
\tag{17}
$$

и, аналогично для A^{k}_{pn}, где

$$
\lambda_{pn} = \begin{cases} 1, & \textit{если } p \neq 0, n \neq 0 \\ 2, & \textit{если } p \neq 0, n = 0 \textit{ или } p = 0, n \neq 0 \\ 4, & \textit{если } p = 0, n = 0 \end{cases}
$$

Система (8)-(15) после замены комплексных рядов Фурье действительными будет иметь вид:

$$
\xi^{(1)}_{k} = \sum_{p\omega_1 \pm n\omega_2 \neq 0}^{\infty} \sum_{f,g=1}^{2} \left\{ \frac{2j\bar{X}^{k}_{(-1)^f p(-1)^g n} \sin((-1)^f p\alpha_1 + (-1)^g n\alpha_2)}{((-1)^f p\omega_1 + (-1)^g n\omega_2)} + \right.
$$
$$
\left. + \frac{2j\bar{\bar{X}}^{k}_{(-1)^f p(-1)^g n} \cos((-1)^f p\alpha_1 + (-1)^g n\alpha_2)}{((-1)^f p\omega_1 + (-1)^g n\omega_2)} \right\}. \tag{18}
$$

Здесь и дальше в формулах одна черта над переменной означает, что берется ее действительная часть, а две - мнимая от X^{k}_{pn} и A^{k}_{pn}. Также следует отметить, что суммирование по повторяющимся индексам n, n' и p, p' ведется от 0 до ∞, а по остальным - от 1 до 2.

$$
j = 1, \textit{если } p \neq 0 \textit{ и } n \neq 0
$$
$$
j = 0.5, \textit{если } p \textit{ или } n = 0
$$

$$
X^{(1)}_{k} = \sum_{g=0}^{1} \left\{ \frac{2j[^{p}_{(-1)^g n}] \left(\bar{X}^{k}_{p,(-1)^g n} \bar{A}^{r}_{p,(-1)^g n} + \bar{\bar{X}}^{k}_{p,(-1)^g n} \bar{\bar{A}}^{r}_{p,(-1)^g n} \right)}{-(p\omega_1 + (-1)^g n\omega_2)} + \right.
$$
$$
+ \frac{2j \left(\bar{\bar{X}}^{q}_{p,(-1)^g n} \frac{\partial \bar{X}^{k}_{p,(-1)^g n}}{\partial x_q} - \bar{X}^{q}_{p,(-1)^g n} \frac{\partial \bar{\bar{X}}^{k}_{p,(-1)^g n}}{\partial x_q} \right)}{(p\omega_1 + (-1)^g n\omega_2)} -
$$
$$
\left. - \frac{2j \frac{\partial \omega_r}{\partial x_q} [^{p}_{(-1)^g n}] \left(\bar{X}^{k}_{p,(-1)^g n} \bar{\bar{X}}^{r}_{p,(-1)^g n} - \bar{\bar{X}}^{k}_{p,(-1)^g n} \bar{X}^{r}_{p,(-1)^g n} \right)}{(p\omega_1 + (-1)^g n\omega_2)^2} \right\}, \tag{19}
$$

$$
\Omega^{(1)}_{k} = \sum_{g=0}^{1} \left\{ \frac{j \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial x_q \partial x_s} \left(\bar{X}^{q}_{p,(-1)^g n} \bar{X}^{s}_{p,(-1)^g n} + \bar{\bar{X}}^{q}_{p,(-1)^g n} \bar{\bar{X}}^{s}_{p,(-1)^g n} \right)}{(p\omega_1 + (-1)^g n\omega_2)^2} + \right.
$$
$$
+ \frac{2j [^{p}_{(-1)^g n}] \frac{\partial \omega_r}{\partial x_q} \left(-\bar{A}^{k}_{p,(-1)^g n} \bar{\bar{X}}^{q}_{p,(-1)^g n} + \bar{\bar{A}}^{k}_{p,(-1)^g n} \bar{X}^{q}_{p,(-1)^g n} \right)}{(p\omega_1 + (-1)^g n\omega_2)^2} -
$$

$$-\frac{2j[{}^{p}_{(-1)^g n}]\left(\bar{A}^k_{p,(-1)^g n}\bar{A}^r_{p,(-1)^g n}+\bar{\bar{A}}^k_{p,(-1)^g n}\bar{\bar{A}}^r_{p,(-1)^g n}\right)}{(p\omega_1+(-1)^g n\omega_2)}-$$

$$-\frac{2j\left[-\frac{\partial\bar{A}^k_{p,(-1)^g n}}{\partial x_s}\bar{\bar{X}}^s_{p,(-1)^g n}+\frac{\partial\bar{\bar{A}}^k_{p,(-1)^g n}}{\partial x_s}\bar{X}^s_{p,(-1)^g n}\right]}{(p\omega_1+(-1)^g n\omega_2)}\Bigg\}+\frac{\partial\omega_k}{\partial x_q}\xi^{(2)}_{q,0}. \qquad (20)$$

Выражения типа $[{}^{p}_{(-1)^g n}]A^r_{p,(-1)^g n}=S$, вычисляются следующим образом:

$$S=pA^1_{p,(-1)^g n}+(-1)^g nA^2_{p,(-1)^g n}$$

аналогично для $[{}^{p}_{(-1)^g n}]\frac{\partial\omega_r}{\partial x_q}$.

$$U^{(1)}_k=\sum_{f,g=0}^{1}\Bigg\{-\frac{\partial\omega_r}{\partial x_q}2j\Bigg[\frac{\bar{X}^q_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{((-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2)^2}\cos((-1)^f p\alpha_1+(-1)^g n\alpha_2)-$$

$$-\frac{\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{((-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2)^2}\sin((-1)^f p\alpha_1+(-1)^g n\alpha_2)\Bigg]\Bigg\}+$$

$$+2j\Bigg[\frac{\bar{A}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{((-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2)}\sin((-1)^f p\alpha_1+(-1)^g n\alpha_2)+$$

$$+\frac{\bar{\bar{A}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{((-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2)}\cos((-1)^f p\alpha_1+(-1)^g n\alpha_2)\Bigg], \qquad (21)$$

$$\xi^{(2)}_k=\sum_{f,g,v,u=0}^{1}2jj'\Bigg\{\frac{\partial\omega_r}{\partial x_q}\Bigg\{[{}^{(-1)^f p}_{(-1)^g n}]\sin[((-1)^v p'+(-1)^f p)\alpha_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\alpha_2]\cdot$$

$$\cdot\frac{(\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}+\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{X}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[((-1)^v p'+(-1)^f p)\omega_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\omega_2]((-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2)^2}-$$

$$-[{}^{(-1)^f p}_{(-1)^g n}]\cos[((-1)^v p'+(-1)^f p)\alpha_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\alpha_2]\cdot$$

$$\cdot\frac{(\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{X}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}-\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[((-1)^v p'+(-1)^f p)\omega_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\omega_2]((-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2)^2}\Bigg\}+$$

$$+\sin[((-1)^v p'+(-1)^f p)\alpha_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\alpha_2]\Bigg[[{}^{(-1)^f p}_{(-1)^g n}]\cdot$$

$$\cdot\frac{(\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{A}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}-\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{A}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[((-1)^v p'+(-1)^f p)\omega_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\omega_2]((-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2)}+$$

$$+\frac{(\frac{\partial\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}+\frac{\partial\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\bar{X}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[((-1)^v p'+(-1)^f p)\omega_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\omega_2]((-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2)}\Bigg]+$$

$$+\cos[((-1)^v p'+(-1)^f p)\alpha_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\alpha_2]\Bigg[[{}^{(-1)^f p}_{(-1)^g n}]\cdot$$

$$\cdot\frac{(\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{A}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}+\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{A}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[((-1)^v p'+(-1)^f p)\omega_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\omega_2]((-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2)}-$$

$$-\frac{(\frac{\partial\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\bar{X}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}-\frac{\partial\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[((-1)^v p'+(-1)^f p)\omega_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\omega_2]((-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2)}\Bigg]\Bigg\}+$$

$$+\xi^{(2)}_{k_2} \tag{22}$$

где

$$\xi^{(2)}_{k_2}=\sum_{f,g,v,u=0}^{1}2jj'\Bigg\{\cos[(-1)^f p\alpha_1+(-1)^g n\alpha_2]\cdot$$

$$\cdot\Bigg[-\left[\begin{smallmatrix}(-1)^f p\\(-1)^g n\end{smallmatrix}\right]\cdot\frac{\frac{\partial\omega_r}{\partial x_l}\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}X^{(0)}_l}{((-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2)^3}+\left[\begin{smallmatrix}(-1)^f p\\(-1)^g n\end{smallmatrix}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{(\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{A}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}+\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{A}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{((-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2)^2}+$$

$$+\frac{(\frac{\partial\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\bar{X}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}-\frac{\partial\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{((-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2)^2}\Bigg]+$$

$$+\sin[(-1)^f p\alpha_1+(-1)^g n\alpha_2]\cdot\Bigg[\left[\begin{smallmatrix}(-1)^f p\\(-1)^g n\end{smallmatrix}\right]\cdot\frac{\frac{\partial\omega_r}{\partial x_l}\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}X^{(0)}_l}{((-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2)^3}+\left[\begin{smallmatrix}(-1)^f p\\(-1)^g n\end{smallmatrix}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{(\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{A}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}-\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{A}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{((-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2)^2}-$$

$$-\frac{(\frac{\partial\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}+\frac{\partial\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\bar{X}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{((-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2)^2}\Bigg]\Bigg\}.$$

В $\xi^{(2)}_{k_2}$ везде n' и p' таковы, чтобы выполнялось равенство $p'\omega_1+n'\omega_2=0$

$$U^{(2)}_s=\sum_{f,g,v,u=0}^{1}2jj'\Bigg\{\frac{\sin[((-1)^v p'+(-1)^f p)\alpha_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\alpha_2]}{[((-1)^v p'+(-1)^f p)\omega_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\omega_2]^2}\left[-\frac{\partial\omega_s}{\partial x_k}\right]\cdot$$

$$\cdot\Bigg\{\left[\begin{smallmatrix}(-1)^f p\\(-1)^g n\end{smallmatrix}\right]\cdot\Bigg[\frac{\partial\omega_r}{\partial x_k}\frac{(\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{X}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}-\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[(-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2]^2}-$$

$$-\frac{(\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{A}}^r_{(-1)^v p',(-1)^u n'}+\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{A}^r_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[(-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2]}\Bigg]+$$

$$+\frac{(\frac{\partial\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\bar{X}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}-\frac{\partial\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[(-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2]}\Bigg\}+$$

$$+\frac{\cos[((-1)^v p'+(-1)^f p)\alpha_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\alpha_2]}{[((-1)^v p'+(-1)^f p)\omega_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\omega_2]^2}\left[-\frac{\partial\omega_s}{\partial x_k}\right]\Bigg\{\left[\begin{smallmatrix}(-1)^f p\\(-1)^g n\end{smallmatrix}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\partial\omega_r}{\partial x_k}\frac{(\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}+\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{X}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[(-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2]^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{A}^r_{(-1)^v p',(-1)^u n'}-\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{A}}^r_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[(-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2]}\right]+$$

$$\left.+\frac{(\frac{\partial\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'}+\frac{\partial\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\bar{X}^q_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[(-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2]}\right\}+$$

$$+\frac{\cos[((-1)^v p'+(-1)^f p)\alpha_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\alpha_2]}{[((-1)^v p'+(-1)^f p)\omega_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\omega_2][(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]}\left\{\left[\begin{smallmatrix}(-1)^f p\\(-1)^g n\end{smallmatrix}\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\frac{\partial\omega_{r'}}{\partial x_l}\frac{(\bar{\bar{X}}^l_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{A}}^s_{(-1)^v p',(-1)^u n'}-\bar{X}^l_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{A}^s_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[(-1)^v p\omega_1+(-1)^u n\omega_2]}+\right.$$

$$\left.+(\bar{A}^{r'}_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{A}}^s_{(-1)^v p',(-1)^u n'}+\bar{\bar{A}}^{r'}_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{A}^s_{(-1)^v p',(-1)^u n'})\right]-$$

$$-\left[\frac{\partial\bar{A}^s_{(-1)^v p',(-1)^u n'}}{\partial x_q}\bar{X}^q_{(-1)^f p,(-1)^g n}-\frac{\partial\bar{\bar{A}}^s_{(-1)^v p',(-1)^u n'}}{\partial x_q}\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^f p,(-1)^g n}\right]\right\}+$$

$$+\frac{\sin[((-1)^v p'+(-1)^f p)\alpha_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\alpha_2]}{[((-1)^v p'+(-1)^f p)\omega_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\omega_2][(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]}\left\{\left[\begin{smallmatrix}(-1)^v p'\\(-1)^u n'\end{smallmatrix}\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\frac{\partial\omega_{r'}}{\partial x_l}\frac{(\bar{\bar{X}}^l_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{A}^s_{(-1)^v p',(-1)^u n'}+\bar{X}^l_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{X}}^s_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]}+\right.$$

$$\left.+(\bar{A}^{r'}_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{A}^s_{(-1)^v p',(-1)^u n'}-\bar{\bar{A}}^{r'}_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{A}}^s_{(-1)^v p',(-1)^u n'})\right]+$$

$$+\left[\frac{\partial\bar{A}^s_{(-1)^v p',(-1)^u n'}}{\partial x_q}\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^f p,(-1)^g n}+\frac{\partial\bar{\bar{A}}^s_{(-1)^v p',(-1)^u n'}}{\partial x_q}\bar{X}^q_{(-1)^f p,(-1)^g n}\right]\right\}+$$

$$+\frac{\sin[((-1)^v p'+(-1)^f p)\alpha_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\alpha_2]}{[((-1)^v p'+(-1)^f p)\omega_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\omega_2]}\frac{\partial^2\omega_s}{\partial x_q\partial x_r}\cdot$$

$$\cdot\frac{(-\bar{X}^q_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{X}^r_{(-1)^v p',(-1)^u n'}+\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{X}}^r_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2][(-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2]}-$$

$$-\frac{\cos[((-1)^v p'+(-1)^f p)\alpha_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\alpha_2]}{[((-1)^v p'+(-1)^f p)\omega_1+((-1)^u n'+(-1)^g n)\omega_2]}\frac{\partial^2\omega_s}{\partial x_q\partial x_r}\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{(\bar{X}^q_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{\bar{X}}^r_{(-1)^v p',(-1)^u n'}+\bar{\bar{X}}^q_{(-1)^f p,(-1)^g n}\bar{X}^r_{(-1)^v p',(-1)^u n'})}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2][(-1)^v p'\omega_1+(-1)^u n'\omega_2]}\right\}-$$

$$-\sum_{f,g=0}^{1}2j\left\{2\frac{\partial\omega_s}{\delta x_k}\left[\frac{\partial\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\frac{-X_q^{(0)}}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]}-\left[\begin{smallmatrix}(-1)^f p\\(-1)^g n\end{smallmatrix}\right]\cdot\right.\right.$$

$$
\cdot\left(\frac{\Omega_r^{(0)}\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]}-\frac{3}{2}\frac{\partial\omega_r}{\partial x_l}\frac{X_l^{(0)}\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]^2}\right)\Bigg]-\frac{\partial^2\omega_s}{\partial x_k\partial x_r}\cdot
$$

$$
\cdot\frac{X_k^{(0)}\bar{\bar{X}}^r_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]}-\frac{\partial\bar{A}^s_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}X_k^{(0)}-\left[\begin{smallmatrix}(-1)^f p\\(-1)^g n\end{smallmatrix}\right]\Bigg[\frac{\partial\omega_r}{\partial x_k}\cdot
$$

$$
\cdot\frac{X_k^{(0)}\bar{A}^s_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]}-\Omega_r^{(0)}\bar{\bar{A}}^s_{(-1)^f p,(-1)^g n}\Bigg]\Bigg\}\frac{\cos[(-1)^f p\alpha_1+(-1)^g n\alpha_2]}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]^2}-
$$

$$
-\sum_{j,g=0}^{1}2j\Bigg\{2\frac{\partial\omega_s}{\partial x_k}\Bigg[\frac{\partial\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}\frac{-X_q^{(0)}}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]}+\left[\begin{smallmatrix}(-1)^f p\\(-1)^g n\end{smallmatrix}\right]\cdot
$$

$$
\cdot\left(\frac{\Omega_r^{(0)}\bar{\bar{X}}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]}+\frac{3}{2}\frac{\partial\omega_r}{\partial x_l}\frac{X_l^{(0)}\bar{X}^k_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]^2}\right)\Bigg]-\frac{\partial^2\omega_s}{\partial x_k\partial x_r}\cdot
$$

$$
\cdot\frac{X_k^{(0)}\bar{X}^r_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]}+\frac{\partial\bar{\bar{A}}^s_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{\partial x_q}X_k^{(0)}-\left[\begin{smallmatrix}(-1)^f p\\(-1)^g n\end{smallmatrix}\right]\Bigg[\frac{\partial\omega_r}{\partial x_k}\cdot
$$

$$
\cdot\frac{X_k^{(0)}\bar{\bar{A}}^s_{(-1)^f p,(-1)^g n}}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]}-\dot{\Omega}_r^{(0)}\bar{A}^s_{(-1)^f p,(-1)^g n}\Bigg]\Bigg\}\frac{\sin[(-1)^f p\alpha_1+(-1)^g n\alpha_2]}{[(-1)^f p\omega_1+(-1)^g n\omega_2]^2}. \quad (23)
$$

В формулах (18)-(23) знаменатели не должны обращаться в 0, то есть они годятся только для нерезонансных областей. В развернутом виде формулы состоят из очень большого числа слагаемых. Приведенная запись в 2-8 раз сокращает число слагаемых в формулах, особенно для вторых гармоник колебаний. Для $\xi^{(2)}_{k_2}$ использование индексов f, g, u и v сокращает количество слагаемых от 176 до 22. Для $U_k^{(2)}$ полное число слагаемых равняется 352, а в нашей записи - всего 44 (развернутые формулы приведены в работе [8]).

Поскольку исследуется **стационарный** резонансный режим, решение должно годиться на временах, когда параметры системы меняются не сильно, т.е.

$$
\mid x_k - x_0 \mid \sim \dot{x}_k \delta t \qquad \text{или}
$$

$$
\delta t < \frac{\delta x_k}{\dot{x}_k} \sim p\omega_1 + n\omega_2, \quad (p, n \ - \ \text{от} \ -\infty \ \text{до} \ +\infty)
$$

то есть вне резонансов, когда $p\omega_1+n\omega_2 \sim \omega_k$ решение пригодно на довольно большом интервале времени. При приближении к резонансам этот интервал значительно меньше, поскольку, из-за резонансных знаменателей, члены более высокого порядка сильно возрастают.

4. В резонансах, в формулах (19)-(23) появились бы особенности в знаменателях из-за того, что в экспоненте

$$
\exp[((-1)^v p' + (-1)^f p)\alpha_1 + ((-1)^u n' + (-1)^g n)\alpha_2]
$$

фаза обращается в ноль.

Несколько изменив схему усреднения, можно избавиться от этих особенностей. В частности, рассмотрим коротационный резонанс, где частота вращения возмущающей силы ($\Omega_p = const$), совпадает с частотой вращения частицы (Ω). Введем новую частоту,

$$
\omega_1 = m(\Omega_p - \Omega),
$$

(m - азимутное волновое число, $\Omega_p = \omega/m$), с которой частица вращающаяся с частотой Ω, воспринимает возмущающее поле с частотой ω. Примем ω_1 за одну из характеристических частот. Соответствующая ей угловая переменная - $\alpha_1 = \omega_1 t$ (аналогично в работе [3] введены "расстройки").

Как видно, для коротации $\omega_1 \to 0$. Поскольку фаза α_1 - теперь "медленная" переменная, ее можно отнести к первому из уравнений (1), и тогда схема вычисления сводится к стандартному методу Боголюбова-Крылова с одной быстрой фазой. При выписывании членов одного порядка из уравнений (4)-(5) следует учесть, что хотя $\omega_1 \ll \omega_2$, но $\frac{\partial^{(n)}\omega_1}{\partial x_k^{(n)}} \sim \omega_2 (n = 1, 2, ...)$.

После подстановки разложений в виде рядов Фурье получим для дрейфов в первом порядке:

$$\Omega_k^{(0)} = \mathrm{A}_{00}^k + \sum_{\substack{p,n=-\infty \\ (p\alpha_1 + n\alpha_2 = 0) \\ n \neq 0}}^{\infty} \mathrm{A}_{pn}^k \tag{24}$$

$$\mathrm{X}_k^{(0)} = \mathrm{X}_{00}^k + \sum_{\substack{p,n=-\infty \\ (p\alpha_1 + n\alpha_2 = 0) \\ n \neq 0}}^{\infty} \mathrm{X}_{pn}^k$$

$$X_k^{(1)} = \sum_{r=1}^{2} \sum_{\substack{p,n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left\{ \frac{\mathrm{X}_{pn}^k r F_{-p,-n}^r}{-n\omega_2} + \frac{\frac{\partial \mathrm{X}_{pn}^k}{\partial x_r} \mathrm{X}_{-p,-n}^r}{-in\omega_2} \right\}, \tag{25}$$

$$\Omega_i^{(1)} = \sum_{q,r=1}^{2} \sum_{\substack{p,n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left\{ \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_q \partial x_r} \mathrm{X}_{pn}^q r \mathrm{X}_{-p,-n}^r}{(n\omega_2)^2} + \frac{\mathrm{A}_{p,n}^i r F_{-p,-n}^r}{-n\omega_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{\partial \mathrm{A}_{pn}^i}{\partial x_r} \mathrm{X}_{-p,-n}^r}{in\omega_2} \right\} + \sum_{q=1}^{2} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_q} \xi_{q,0}^{(2)} \tag{26}$$

и для колебательных членов:

$$\xi_k^{(1)} = \sum_{\substack{p,n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\mathrm{X}_{pn}^k e^{in\alpha_2}}{in\omega_2} \tag{27}$$

$$U_k^{(1)} = \sum_{\substack{p,n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{F_{pn}^k e^{in\alpha_2}}{in\omega_2}, \tag{28}$$

где $$F_{pn}^k = \sum_{r=1}^{2} \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial x_r} \frac{\mathrm{X}_{pn}^r}{in\omega_2} + \mathrm{A}_{pn}^k \right]$$

$$\xi_k^{(2)} = \sum_{\substack{p,n,p',n'=-\infty \\ n \neq 0 \\ (n'+n)\omega_2 \neq 0}}^{\infty} \left\{ D_k \frac{e^{i(n'+n)\alpha_2}}{i(n+n')\omega_2} + B_k \frac{e^{in\alpha_2}}{in\omega_2} \right\}, \tag{29}$$

где $D_k = \sum_{\substack{r=1 \\ n\neq 0}}^{2} \left\{ \frac{irF^r_{p'n'}X^k_{pn} + \frac{\partial X^k_{pn}}{\partial x_r} X^r_{p'n'}}{in'\omega_2} \right\}$ и

$$B_k = \sum_{\substack{r,i=1 \\ n\neq 0}}^{2} \left\{ \frac{-\frac{\partial X^k_{pn}}{\partial x_r} X_{p'n'(p'\alpha_1+n'\alpha_2=0)}}{in\omega_2} - \frac{rX^k_{pn}\Omega^{(0)}_r}{n\omega_2} + \frac{X^k_{pn}X^{(0)}_l r\frac{\partial\omega_r}{\partial x_l}}{i(n\omega_2)^2} \right\},$$

$$U^{(2)}_s = \sum_{k,r',r,q=1}^{2} \sum_{\substack{p,n,p',n'=-\infty \\ n\neq 0 \\ (n'+n)\omega_2\neq 0}}^{\infty} \left\{ -\frac{\partial\omega_s}{\partial x_k}\left[D_k \frac{e^{i(n'+n)\alpha_2}}{[(n+n')\omega_2]^2} + B_k\frac{e^{in\alpha_2}}{(n\omega_2)^2}\right] + \right.$$

$$+\left[\frac{r'F^{r'}_{pn}A^s_{p'n'}}{n\omega_2} + \frac{\partial A^s_{p'n'}}{\partial x_r}X^r_{pn}\frac{1}{in\omega_2}\right]\cdot\frac{e^{i(n'+n)\alpha_2}}{i(n+n')\omega_2} -$$

$$-X^{(0)}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{F^s_{p'n'}}{in'\omega_2}\right]\frac{e^{in'\alpha_2}}{in'\omega_2} + \Omega^{(0)}_{r'}\frac{r'F^s_{p'n'}e^{in'\alpha_2}}{(n'\omega_2)^2} -$$

$$\left. -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_s}{\partial x_q\partial x_r}\frac{X^q_{pn}X^r_{p'n'}e^{i(n'+n)\alpha_2}}{inn'(n'+n)\omega_2^3}\right\}. \tag{30}$$

Таким образом, движение частицы в коротационном резонансе, оказывается одночастотным, то есть вырождается, поскольку вынужденные колебания становятся дрейфовыми движениями исчезающе малой частоты. В выражениях (24)-(30) присутствуют чисто свободные колебания по α_2 и дрейфовые члены, совпадающие с найденными авторами ранее методом Боголюбова для случая медленно меняющегося гравитационного возмущения [6].

Решение в коротации (24)-(30) отличается от ~~резонансных~~ одночастотных комплексных решений работ [1], [3] и [4] присутствием колебательных членов второго порядка малости, и, благодаря допущению, принятому в данной работе, о не обращении в ноль нулевой гармоники $\xi^{(2)}_k$, наличием дополнительных слагаемых в дрейфовых членах.

5. Формулы (8)-(15) и (24)-(30) описывают движение частицы по всему диску, гладко сшиваясь при $\omega_1 \to 0$, когда $r \to r_{corotation}$. При дифференциальном вращении диска существуют области, где для знаменателей выполняется условие $p\omega_1 + n\omega_2 = 0$ при $p, n = \pm 1$, которое соответствует областям так называемых линдбладовских резонансов [7]. В них частота вынужденных колебаний ω_1 численно равна эпициклической, с которой частица колеблется около круговой орбиты.

Избежать особенностей типа линдбладовских резонансов в решениях можно, вводя в качестве новой "медленной" переменной сумму или разность фаз вынужденных и эпициклических колебаний звезд в исходных динамических уравнениях. Тогда, как и случай коротации, случай линдбладовских резонансов сводится к одночастотному, то есть к формулам, подобным (24)-(30).

Целесообразность подробного изложения метода авторы видят в том, что число задач физики колебаний очень велико и использование общих формул, полученных нами в действительной тригонометрической форме, облегчит их решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. - Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1974, с. 394-399.

2. Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. - М.: Наука, 1972, (2 издание - 1977). - 432 с.

3. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебаний. - Изд.-во МГУ, Москва, 1971. - 507 с.

4. Гребеников Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах. - М.: Наука, 1986. - 255 с.

5. Линдблад Б. - В кн. Строение звездных систем. - М., И. Л., 1962, с. 83-85.

6. Иванникова Е. И., Максумов М. Н. - Докл. АН ТаджССР, 1985, т. 28, № 11, с. 631-634.

7. Lin C. C., Lau Y. Y. Studies in applied mathematics, v. 60, № 2, 1979, p. 97-163.

8. Исследования по динамике и структуре спиральных галактик (отчет). Инв. № 0291.0024813. № гос. регистр. 01.86.066298 - Институт астрофизики АН ТаджССР. Иванникова Е. И., Иванов А. В., Максумов М. Н., Сахибов Ф. Х. - Душанбе, 1990. - 108 с.

Институт астрофизики
АН Республики Таджикистан

17 июля 1992 г.

УСЛУБИ МИЁНАГУЗОРӢ ДАР СИСТЕМАИ ДИНАМИКИИ ЧАРХЗАНАНДА БО ДУ БАСОМАДҲОИ РЕЗОНАНСНОК

Е. И. ИВАННИКОВА, М. Н. МАҲСУМОВ

Назарияи зоҳирии (формалии) асимптотикӣ барои лаппишҳои доимӣ (стационарӣ) дар системаи номбурда бо саҳеҳии муайян то ҷамъшавандаҳои тартиби дуюм нисбат ба параметри хурд инкишоф ёфтааст. Ҳамчун параметри хурдӣ қиммати чаппаи бештарин аз басомадҳо дар бар гирифта шудааст. Асоси ин назария - корфармоии бевоситаи услуби миёнагузорӣ барои системаи дубасомаднок мебошад. Вазъияти резонансӣ (аз ҷумла, резонанси коротационӣ, яъне мавриди баробар омадани басомади чархзании система ва басомади чархзании қувваи ғалаёновар) ва ё набудани он ҷудогона дида баромада шудааст. Дар ҳолати резонансӣ ҳаракат вайрон шуда, якбасомаднок мешавад, чун ки яке аз лаппишҳо ба ҳаракати сайрӣ (дрейфӣ) мубаддал мегардад. Ҳалҳо дар шакли ҳақиқии тригонометрӣ оварда шудаанд, барои он, ки дарьёфти натиҷаҳои конкретии физикӣ осон гардад.