БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА АСТРОФИЗИКИ АКАДЕМИИ НАУК
ТАДЖИКСКОЙ ССР, 1980 г., № 69—70

М. Н. МАКСУМОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГРАВИТАЦИОННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ВРАЩАЮЩИХСЯ ГАЛАКТИК

Получены формальные нелокальные соотношения для анализа устойчивости дифференциально вращающихся галактик по отношению к слабозакрученным неосесимметрическим возмущениям. Обсуждается специфика неустойчивостей в такой системе.

ON THE GRAVITATIONAL STABILITY OF DIFFERENTIALLY ROTATING GALAXIES, by M. N. Maksumov. Formal nonlocal relations are derived for studying the stability of differentially rotating galaxies to the weakly wound non—axisymmetric perturbations. The integral equation for the perturbed spatial stellar density is the basic equation of the problem. Fredholmian determinant provides the dispersion relation. The tendency of differentially rotating galaxies to development of specific overstabilities due to differential rotation and asymmetrical drift is discussed.

С дифференциальным характером вращения связаны многие особенности фазовой структуры галактик как самогравитирующих бесстолкновительных ансамблей точечных масс. Динамическая и кинематическая значимость дифференциального вращения для звездных систем в стационарном состоянии проявляется прежде всего в эллипсоидальном характере распределения остаточных звездных скоростей, в дифференциальных эффектах в звездных движениях. Достаточно полная теория показывает наличие особых дифференциальных эффектов и в остаточных движениях звезд — специфических дрейфовых движений, обусловленных дифференциальным характером вращения галактик. Эти дрейфовые движения звезд аналогичны магнитному дрейфу заряженных частиц. Дифференциальному характеру вращения галактик сопутствует пространственная неоднородность в распределении звезд. Эта неоднородность приводит к явлению асимметрии звездных движений, аналогичному явлению ларморовских дрейфов в неоднородной плазме.

Сложная фазовая структура дифференциально вращающихся галактик определяет не только своеобразие их равновесия, но и их устойчивость и динамику. Ниже в рамках бесстолкновительной кинетики рассмотрены колебания и устойчивость фазовых распределений в дифференциально вращающихся галактиках. Обсуждается специфическая неустойчивость малых отклонений от ротационной симметрии, обусловленная дифференциальными эффектами в остаточных (пекулярных) движениях звезд, а также асимметрией звездных движений. Чтобы свести до минимума математические трудности, присущие уравнениям задачи (кинетическому уравнению и уравнению Пуассона), (1) изучим эффект для простейших моделей неограниченных по радиусу бесконечно тонкого диска и бесконечно вытянутого вдоль оси вращения цилиндра с почти круговыми плоскими орбитами; (2) ограничимся возмущениями, не меняющими состояние вдоль оси вращения; (3) рассмотрим вещественные (по радиальной координате) решения уравнений задачи, т. е. неосесимметричные возмущения считаем предельно слабо закрученными.

В отличие от работ [1, 2] более последовательно учтена асимметрия звездных движений и получены (при некоторых дополнительных упрощениях) формальные нелокальные соотношения для рассматриваемых колебаний.

Рассмотрим дифференциально вращающуюся галактику с возбужденными в ней малыми неосесимметричными колебаниями. Со сделанными выше оговорками наше, в большой степени, приближенное рассмотрение можно вести в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) конфигурационного пространства с осью z, направленной вдоль оси вращения. Начало системы координат совпадает с центром вращения. В цилиндрических координатах угловая скорость вращения $\Omega=\Omega(\rho)$. Введем редуцированный гравитационный потенциал $\psi=\psi(t, \rho, \varphi, z)$, т. е. потенциал, из которого вычтена часть, скомпенсированная центробежной силой. Эта последняя выпадает поэтому из уравнений. Выделим круговую скорость звезд и введем переменные остаточной скорости $(v_\perp = \sqrt{v^2_\rho + v^2_\varphi}$, $\alpha=\operatorname{arctg} v_\varphi / v_\rho$, $v_z)$, где v_ρ, v_φ, v_z—проекции остаточной скорости на оси цилиндрической системы координат. Тогда уравнение для функции фазовой плотности $f = f\,(t, \rho, \varphi, z, v_\perp, \alpha, v_z)$ запишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\perp \cos\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} + \left(\frac{v_\perp \sin\alpha}{\rho} + \Omega\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} +$$

$$+ \left(\cos\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\sin\alpha}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \rho \frac{d\Omega}{d\rho} v_\perp \sin 2\alpha\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial v_\perp} +$$

$$+ \left(-\frac{\sin\alpha}{v_\perp} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\cos\alpha}{v_\perp \cdot \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{v_\perp \sin\alpha}{\rho} - \frac{1}{2} \rho \frac{d\Omega}{d\rho} \cos 2\alpha\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} -$$

$$- \varkappa \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0, \qquad (1)$$

где $\varkappa = 2\,\Omega + \frac{1}{2} \rho \frac{d\Omega}{d\rho}$.

Функцию распределения и потенциал рассматриваемой системы можно разложить в ряд Фурье по φ:

$$f = f_0 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} f'_m = f_0 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{im\varphi},$$

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi'_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m e^{im\varphi}. \qquad (2)$$

Фоновую функцию распределения f_0 можно представить в виде

$$f_0 = f^0 + \frac{v_\perp}{\varkappa} \sin\alpha \cdot \frac{\partial f^0}{\partial \rho} + \ldots \qquad (3)$$

Второй член в (3) (и последующие) описывает асимметрию звездных движений. f^0 — изотропная, не зависящая от α функция. $f^0 =$

$$= f^0\,(\rho, \varepsilon_\perp, v_z), \text{ где } \varepsilon_\perp = \frac{v^2_\perp}{\varkappa} \Omega.$$

Уравнения звездных орбит имеют следующий приближенный вид:

$$\rho = \rho_0 - \frac{v_{\perp 0}}{\varkappa} \sin(\alpha_0 - \varkappa t) + \frac{v_{\perp 0}}{\varkappa} \sin\alpha_0,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Omega t + \frac{v^2_{\perp 0}}{\rho_0\,\varkappa^2}\cdot\frac{d\left(\frac{\varkappa}{2}\right)}{d\rho}\,t +$$

$$+\frac{v_{\perp 0}}{\varkappa\,\rho_0}\cos(\alpha_0 - \varkappa t) - \frac{v_{\perp 0}}{\varkappa\,\rho_0}\cos\alpha_0,$$

$$v_\perp = v_{\perp 0},\quad \alpha = \alpha_0 - \varkappa t. \tag{4}$$

Индекс «о» обозначает лагранжевы координаты звезды. В соотношение для угла φ входит дрейфовый (систематический) член, пропорциональный градиенту угловой скорости. Он отражает дифференциальный эффект в остаточных движениях звезд. Колебания вдоль оси вращения мало важны для возмущений, не меняющих состояние вдоль нее. Уравнение (1) всегда может быть усреднено по ним.

Подставляя соотношения (2) в уравнение (1) и линеаризуя последнее относительно f'_m, получим уравнение для расчета колебаний фазовой плотности [1].

Перейдя к лагранжевым переменным звезд, имеем

$$f'_m = -\int\limits_{-\infty}^{t}\left\{\cos\alpha\frac{\partial\psi'_m}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} + \frac{\sin\alpha}{\rho}\frac{\partial\psi'_m}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\alpha}{v_\perp}\frac{\partial\psi'_m}{\partial\rho}\frac{\partial f_0}{\partial\alpha} + \frac{\cos\alpha}{v_\perp\rho}\frac{\partial\psi'_m}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\alpha}\right\}dt'. \tag{5}$$

Переменные ρ, $\varphi, v_\perp$, α под знаком интеграла следует считать функциями времени согласно соотношениям (4).

При колебаниях поля вида $\psi'_m = \psi_m e^{i(m\varphi-\omega t)}$ и в пределе неосесимметрических возмущений с $\operatorname{tg} i \to \infty$ (i — угол наклона, $\operatorname{tg} i = \frac{k_\varphi}{k_\rho}$, $k_\varphi = \frac{m}{\rho}$, k_ρ — азимутальное и радиальное волновые числа) амплитуда возмущения функции фазовой плотности равна

$$f_m = -2\psi_m\cdot\frac{\partial f_0}{\partial v^2_\perp} - i\left[2(\omega - m\Omega)\cdot\frac{\partial f_0}{\partial v^2_\perp} + \frac{m}{\varkappa\rho}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\rho}\right]\times$$

$$\times\left[-i\psi_m\cdot\sum_{l,s=-\infty}^{\infty}\frac{J_l(\zeta)\cdot J_s(\zeta)\,e^{-i(s-l)\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}}{m\Omega-\omega+\frac{mv^2_\perp}{\varkappa\rho}b + s\varkappa} + \right.$$

$$+\frac{v_\perp}{\varkappa}\cdot\frac{\partial\psi_m}{\partial\rho}\cdot\frac{1}{2}\left\{\sum_{l,s}\frac{J_l(\zeta)J_s(\zeta)\,e^{i(s-l)\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-i(s-l-1)\alpha}}{m\Omega-\omega+\frac{mv^2_\perp}{\varkappa\rho}b+(s-1)\varkappa} - \right.$$

$$\left. - \sum_{l,s}\frac{J_l(\zeta)J_s(\zeta)e^{i(s-l)\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-i(s-l+1)\alpha}}{m\Omega-\omega+\frac{mv^2_\perp}{\varkappa\rho}b+(s+1)\varkappa}\right\} -$$

$$-\frac{v_\perp}{\varkappa}\frac{\partial\psi_m}{\partial\rho}\cdot\frac{1}{2}\left\{\sum_{l,s}\frac{J_l(\zeta)\cdot J_s(\zeta)e^{i(s-l)\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-i(s-l-1)\alpha}}{m\Omega-\omega+\frac{mv^2_\perp}{\varkappa\rho}b+s\varkappa} - \right.$$

$$-\sum_{l,s}\frac{J_l(\zeta)\cdot J_s(\zeta)e^{i(s-l)\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-i(s-l+1)\alpha}}{m\,\Omega-\omega+\frac{mv_\perp^2}{\varkappa\rho}b+s\varkappa}\Big\}+\cdots\Big],\qquad(6)$$

где $\zeta=\frac{mv_\perp}{\varkappa\rho}$, $b=\frac{1}{2}\frac{d\ln\varkappa}{d\rho}$, $J_l(\zeta)$, $J_s(\zeta)$ — функции Бесселя первого рода.

При получении выражения (6) из-за слабой закрученности возмущений ($\operatorname{tg} i\to\infty$) в интегралах соотношения (5) пренебрегалось радиальными колебаниями звезд. Это совершенно аналогично пренебрежению азимутальными колебаниями (осцилляциями угла φ) при тугой закрутке, когда $\operatorname{tg} i$ мал. Учет радиальных колебаний по схеме, включающей много членов разложения

$$\psi(\rho)=\psi(\rho_0)+(\rho-\rho_0)\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=\rho_0}+\frac{1}{2!}(\rho-\rho_0)^2\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}\Big|_{\rho=\rho_0}+\cdots\qquad(7)$$

где $(\rho-\rho_0)$ берутся согласно соотношениям (4), приводит к еще более громоздким выражениям. Для иллюстрации в (6) учтен второй член разложения (7).

Предполагая возмущение потенциала монотонным по радиусу и используя преобразование Фурье-Бесселя, находим из уравнения Пуассона следующие выражения для амплитуды потенциала

$$\psi_m=\frac{\gamma}{2^{(1-n)}}\cdot\int\limits_0^\infty\left(\int f_m(\rho',\vec v)\,d\vec v\right)\rho'\,d\rho'\cdot\int\limits_0^\infty J_m(\lambda\rho')\cdot J_m(\lambda\rho)\cdot\lambda^{-n}\cdot d\lambda\qquad(8)$$

J_m — функция Бесселя, $\gamma=4\pi GM$ (G — ньютоновская гравитационная постоянная, M — масса звезды), $n=0$ для диска, $n=1$ — для цилиндра.

Подставив выражение (8) для ψ_m в соотношение (6) и проинтегрировав последнее по переменным скорости, получим интегральное уравнение для возмущенной пространственной звездной плотности

$$F_m(\rho)=\int f_m(\rho,\vec v)\,d\vec v:$$

$$F_m(\rho)=\int\limits_0^\infty K(\rho,\rho',\omega)\,F_m(\rho')\,d\rho',\qquad(9)$$

где

$$K(\rho,\rho',\omega)=-\frac{2\pi\gamma}{2^{(1-n)}}\cdot\int\limits_0^\infty\rho'\,J_m(\lambda\rho')J_m(\lambda\rho)\cdot\lambda^{-n}\,d\lambda\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty dv_\perp\cdot\sum_s\frac{\left[\left(s\varkappa+\frac{mv_\perp^2}{\varkappa\rho}b\right)\cdot\frac{\partial f^0}{\partial v_\perp}+\frac{mv_\perp}{\varkappa\rho}\cdot\frac{\partial f^0}{\partial\rho}\right]\cdot J_s^2(\zeta)}{m\Omega-\omega+\frac{mv_\perp^2}{\varkappa\rho}b+s\varkappa}+\cdots$$

При $m\geqslant2$ интеграл по λ сходится в нуле. Многоточие означает члены порядка выше первого по r_{cor}/L от первого члена разложения (3) и члены порядка r_{cor}/L и выше от последующих членов разложения (3), L — характерный размер неоднородности звездной плотности, $r_{\text{cor}}=v_\perp/\varkappa$.

Уравнение (9) содержит полное решение задачи устойчивости по отношению к неосесимметрическим возмущениям со слабой закруткой. Считая справедливой фредгольмовость уравнения, известным способом находим собственные функции и частоты ω [3]. Например, ω находятся из определителя Фредгольма

$$D(\omega) = 1 - \frac{1}{1!}\int_0^\infty K(\rho,\rho)\,d\rho + \frac{1}{2!}\int_0^\infty\int_0^\infty \begin{vmatrix} K(\rho,\rho) & K(\rho,\rho_1) \\ K(\rho_1,\rho) & K(\rho_1,\rho_1) \end{vmatrix} d\rho\cdot d\rho_1 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\underbrace{\int\cdots\int}_{(n)} \begin{vmatrix} K(\rho,\rho) & K(\rho,\rho_1)\cdots K(\rho,\rho_{n-1}) \\ K(\rho_1,\rho) & K(\rho_1,\rho_1)\cdots K(\rho_1,\rho_{n-1}) \\ \cdots & \cdots \\ K(\rho_{n-1},\rho) & K(\rho_{n-1},\rho_1)\cdots K(\rho_{n-1},\rho_{n-1}) \end{vmatrix} \times$$

$$\times\, d\rho\cdot d\rho_1\cdots d\rho_{n-1} + \cdots = 0 \qquad (10)$$

Параметр ω под интегралами в (10) опущен для упрощения записи.

Если ядро интегрального уравнения мало, то в определителе Фредгольма можно ограничиться первыми двумя слагаемыми. Если, к тому же, перейти во втором слагаемом к интегралу с переменным верхним пределом, то получим «локальное» дисперсионное уравнение:

$$1 - \int_0^\rho K(\rho_1,\rho_1,\omega)\,d\rho_1 \approx 0. \qquad (11)$$

В отличие от локальных дисперсионных соотношений, использованных в работах [1, 2], оно содержит два дополнительных интегрирования — по координате ρ и параметру λ. Это сильно усложняет расчет, но, по-видимому, приводит к близким (по сравнению с прежними) значениям частот и инкрементов.

В дисперсионных соотношениях (10), (11) появляются специфические резонансные знаменатели, обязанные дрейфовым (из-за дифференциальности вращения) движениям звезд. С ними, как известно, связываются так называемые кинетические неустойчивости соответствующих ветвей колебаний.

Вообще говоря, соотношение (11) лишь качественно правильно описывает кинетические неустойчивости, так как для кинетических неустойчивостей соответствующие ядра могут оказаться не очень малыми и лучше брать в соотношении (10) несколько слагаемых.

Уравнения (9)—(11) учитывают не только дифференциальные эффекты, но и конвективный перенос гравитационным дрейфовым движением в поле волны потенциала [2, 4], и асимметричный дрейф, и влияние асимметрии звездных движений ([1], [4]).

Можно показать, что с асимметричным дрейфом может быть связана неустойчивость дрейфово-вращательных высокочастотных колебаний, аналогичных плазменным дрейфово-циклотронным. Рассмотрение высокочастотных колебаний проводится известным методом [5]. Для этой ветви колебаний дифференциальные эффекты не существенны, если асимметрия звездных движений сильная. В противном случае существует дополнительная резонансная неустойчивая ветвь колебаний.

Если асимметрия звездных движений слабая, то существен названный выше конвективный перенос. Дифференциальные эффекты приводят при этом к раскачке низкочастотных колебаний. Например, в локальном приближении дисперсионное соотношение для таких колебаний есть [2], [4], [6].

$$1 - a_1\cdot\int_0^\infty \frac{\frac{dn}{d\rho} - b\cdot n\cdot\xi}{\tilde{\omega} - a_2\cdot\xi}\, e^{-\xi}\cdot d\xi = 0 \qquad (12)$$

для максвелловского типа фонового распределения. a_1 — постоянная, $a_2 = k_\varphi \cdot \overline{v_{\text{др}}} = \frac{m}{\rho} \cdot \frac{b\overline{v^2}}{\varkappa}$ ($\overline{v^2}$ — дисперсия остаточных скоростей), n — концентрация звёзд, $\tilde{\omega} = \omega - m\Omega$, $\omega = \omega_r + i\,\omega_i$.

Из (12) следует

$$\tilde{\omega}_r = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + B},$$

$$\omega_i = -\frac{\pi\tilde{\omega}^2_r}{a_2} \frac{\frac{dn}{d\rho} - bn \cdot \frac{\tilde{\omega}_r}{a_2}}{(2a_2 + \tilde{\omega}_r)\frac{dn}{d\rho} - b \cdot n \cdot \tilde{\omega}_r} \cdot e^{-\frac{\tilde{\omega}_r}{a_2}}, \tag{13}$$

где $A = a_1 \cdot \left(\frac{dn}{d\rho} - bn\right)$, $B = a_1 \cdot a_2 \cdot \frac{dn}{d\rho}$.

$\tilde{\omega}_r$ выбираются удовлетворяющими условию $\tilde{\omega}_r/m < 0$. Порядок $\tilde{\omega}_r$ совпадает с условием раскачки вследствие эффекта Черенкова $\tilde{\omega}_r = k_\varphi \cdot \overline{v_{\text{др}}}$. При $\frac{dn}{d\rho}$, $b \to 0$ стремятся к нулю и $\tilde{\omega}_r$, ω_i.

Таковы выводы о гравитационной устойчивости дифференциально вращающихся галактик, к которым приводит общая структура уравнений (9)—(11) и упрощенные локальные оценки. Более точный анализ, подтвержденный численными расчетами, затруднен в любой модели галактики с дифференциальными эффектами. В простых моделях с постоянной круговой скоростью или кеплеровским вращением дифференциальные эффекты в остаточных движениях звезд исчезают.

Очевидно, что рассмотренная специфическая неустойчивость малых отклонений от ротационной симметрии представляет интерес для проблемы происхождения слабозакрученной спиральной структуры галактик.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Н. Максумов. Бюл. Ин-та астрофиз. АН ТаджССР, № 64, 3, (1974).
2. M. N. Maksumov. «Galaxies and Relativistic Astrophys». Proc. 1—st. Eur. Astron. Meet., Athens, 1972. Vol. 3. Berlin e. a., 1974, p. 120.
3. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 4, ч. 1, изд. 6-е, «Наука», 1974, § 11, 48; У. В. Ловитт. Линейные интегральные уравнения. Пер. с англ., изд. 2-е, М., 1957.
4. М. Н. Максумов. Дифференциальные эффекты в пекулярных движениях звезд и динамика дифференциально вращающихся галактик. Ротапринт. Душанбе, 1974.
5. Diament. Phys. Fluids 10, 470, (1967); C.—S. Wu. Phys. Fluids 11, No. 3, 545, (1968); М. Н. Максумов. Докл. АН ТаджССР, 13, № 2, 15, (1970).
6. М. Н. Максумов, Ю. Н. Мишуров. Бюл. Ин-та астрофиз. АН ТаджССР, № 64, 16 (1974).