Доклады Академии наук Республики Таджикистан,
1993, Том $XXXVI$, N 2

УДК 524.3/4-32+524.6+524.7 **АСТРОФИЗИКА**

Е.И.ИВАННИКОВА, М.Н.МАКСУМОВ

О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ЗВЕЗД В ДИСКЕ С ВРАЩАЮЩИМСЯ БАРОМ

(Представлено академиком АН Республики Таджикистан З.Д.Усмановым 17 IX 1992)

В данной работе, используя общую теорию, развитую на основе метода усреднения для двухчастотной вращающейся динамической системы [1], исследуются орбитальное движение звезды и изменение ее остаточных скоростей в дисковой дифференциально вращающейся галактике в нерезонансных областях. Это решение гладко сшивается с решением в коротационной области (где скорость движения частицы совпадает со скоростью вращения бара), найденными авторами ранее [2], описывая, таким образом, движение частицы во всем галактическом диске, за исключением линдбладовских резонансов.

В качестве исходных используем уравнения движения звезд в диске с анизотропным (шварцшильдовским) распределением по скоростям [2], в которых круговое и некруговое движения разделены:

$$\frac{dr}{dt} = v_\perp \cos\alpha, \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega + \frac{v_\perp}{ar}\sin\alpha, \tag{2}$$

$$\frac{dv_\perp}{dt} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{v_\perp^2 B}{4r}\right)\cos\alpha + \frac{a}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\sin\alpha - \frac{v_\perp^2 B}{4r}\cos 3\alpha, \tag{3}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\kappa + \frac{a}{v_\perp r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\cos\alpha - \left(\frac{1}{v_\perp}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{v_\perp}{a^2 r} - \frac{v_\perp B}{4r}\right)\sin\alpha + \frac{v_\perp B}{4r}\sin 3\alpha. \tag{4}$$

Здесь r, φ – цилиндрические координаты в галактоцентрической системе отсчета (ось Z совпадает с осью вращения диска), $\Omega(r)$ – угловая скорость вращения, $\kappa^2 = 2\Omega(2\Omega + r\frac{d\Omega}{dr})$ – эпициклическая частота,

$$v_\perp = (v_r^2 + v_\varphi'^2), \qquad \alpha = \arctan(v_\varphi'/v_r), \tag{5}$$

где $v_\varphi' = (2\Omega/\kappa)v_\varphi$, а v_φ, v_r – остаточные азимутальная и радиальная скорости соответственно, $a = 2\Omega/\kappa$, $B = a^{-2} - 1 + r(d\ln a/dr)$, Ψ – редуцированный гравитационный потенциал (из которого вычтена часть, скомпенсированная вращением). Это удобно, если орбитальное движение звезд мало отличается от кругового. Некруговое движение звезд в начальный момент представлено тогда, при отсутствии возмущения, свободными эпициклическими колебаниями. Выберем Ψ в виде

$$\Psi = \Psi(r)\cos(m\varphi - \omega t), \tag{6}$$

что соответствует случаю бара или спутника ($m = 1, 2, \ldots$, ω - частота изменения поля бара).

Вводя для вынужденных колебаний новую фазу $\chi = m\varphi - \omega t$, или $\dot{\chi} = m\Omega - \omega$, с учетом вида потенциала (6) перепишем уравнения (1)-(4) в виде:

$$\frac{dr}{dt} = \bar{X}^1_{01}(e^{i\alpha} + \text{к.с.}), \tag{7}$$

$$\frac{d\chi}{dt} = A^1_{00} + i\,\bar{\bar{A}}^1{}_{01}\,(e^{i\alpha} - \text{к.с.}), \tag{8}$$

$$\frac{dv_\perp}{dt} = \bar{X}^2_{01}(e^{i\alpha} + \text{к.с.}) + \bar{X}^2_{03}(e^{3i\alpha} + \text{к.с.}) + \tag{9}$$
$$+\bar{X}^2_{11}(e^{i(\alpha+\chi)} + \text{к.с.}) + \bar{X}^2_{1,-1}(e^{i(\alpha-\chi)} + \text{к.с.}),$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = A^2_{00} + i\,\bar{\bar{A}}^2{}_{01}\,(e^{i\alpha} - \text{к.с.}) + i\,\bar{\bar{A}}^2{}_{03}\,(e^{3i\alpha} - \text{к.с.}) + \tag{10}$$
$$+i\,\bar{\bar{A}}^2{}_{11}\,(e^{i(\alpha+\chi)} - \text{к.с.}) - i\,\bar{\bar{A}}^2{}_{1,-1}\,(e^{i(\alpha-\chi)} - \text{к.с.}).$$

Здесь

$$\bar{X}^1_{01} = \bar{X}^1_{0\,-1} = \frac{v_\perp}{2}, \qquad A^1_{00} = m\Omega - \omega; \quad A^2_{00} = -\kappa, \tag{11}$$

$$\bar{X}^2_{01} = \bar{X}^2_{0,-1} = \frac{v_\perp^2 B}{8r}, \qquad \bar{\bar{A}}^1{}_{01} = -\bar{\bar{A}}^1{}_{0,-1} = -\frac{m v_\perp}{2ar},$$

$$\bar{X}^2_{03} = \bar{X}^2_{0,-3} = -\frac{v_\perp^2 B}{8r}, \qquad \bar{\bar{A}}^2{}_{01} = -\bar{\bar{A}}^2{}_{0,-1} = \frac{v_\perp}{2a^2 r} - \frac{v_\perp B}{8r},$$

$$\bar{X}^2_{11} = \frac{1}{4}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{ma\Psi}{4r}, \qquad \bar{\bar{A}}^2{}_{03} = -\bar{\bar{A}}^2{}_{0,-3} = -\frac{v_\perp B}{8r},$$

$$\bar{X}^2_{1,-1} = \frac{1}{4}\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{ma\Psi}{4r}, \qquad \bar{\bar{A}}^2{}_{11} = \frac{1}{4v_\perp}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{ma\Psi}{4v_\perp r},$$

$$\bar{\bar{A}}^2{}_{1,-1} = -\frac{1}{4v_\perp}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{ma\Psi}{4v_\perp r}$$

– конкретизированный вид Фурье-компонент, соответствующий разложениям (6), (7) и (16), (17) статьи [1], где

$$\bar{X}^k_{pn} = (a^k_{pn} - d^k_{pn})\frac{\lambda_{pn}}{4}, \qquad \bar{\bar{X}}^k_{pn} = (-b^k_{pn} - c^k_{pn})\frac{\lambda_{pn}}{4},$$

$$\bar{X}^k_{p,-n} = (a^k_{pn} + d^k_{pn})\frac{\lambda_{pn}}{4}, \qquad \bar{\bar{X}}^k_{p,-n} = (-b^k_{pn} + c^k_{pn})\frac{\lambda_{pn}}{4},$$

и аналогично для $\bar{A}^k_{pn}$ и $\bar{\bar{A}}^k_{pn}$

В результате подстановки (11) в конечные формулы (18)-(23) статьи [1] получим для нерезонансной области следующие выражения для координат и скоростей звезды:

(12) $$r = r_0 + \delta r^{(2)} - \delta r^{(1)} \sin\alpha + \delta r^{(2)} \cos 2\alpha + \delta r_g,$$

$$\delta r_g = -\frac{\cos(m\varphi - \omega t)}{(m\Omega - \omega)^2 - \kappa^2} \left(\frac{am\Psi}{r}\kappa + \frac{\partial\Psi}{\partial r}(m\Omega - \omega) \right) \frac{1}{m\Omega - \omega},$$

$$\delta r^{(1)} = \frac{v_\perp}{\kappa}; \quad \delta r^{(2)} = \frac{v_\perp^2}{4\kappa^2 r} \left(1 - \frac{2}{3}\frac{d\ln\kappa}{d\ln r} \right).$$

(13) $$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi^{(1)} \cos\alpha + \delta\varphi^{(2)} \sin 2\alpha + \delta\varphi_d + \delta\varphi_g \sin(m\varphi - \omega t),$$

$$\delta\varphi^{(1)} = \frac{av_\perp}{\kappa r}; \quad \delta\varphi^{(2)} = \frac{av_\perp^2}{4\kappa^2 r^2} \left(-\frac{1}{3}\frac{d\ln\kappa}{d\ln r} + 2 \right),$$

$$\delta\varphi_g = \left\{ \frac{2\Omega\frac{\partial\Psi}{\partial r}}{r(m\Omega - \omega)(\omega_1^2 - \omega_2^2)} + \frac{\frac{am\Psi}{r}\left[(m\Omega - \omega)^2 - 2r\Omega\Omega'\right]}{r(m\Omega - \omega)^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right\},$$

$$\delta\varphi_d = \left(\Omega + \frac{v_\perp^2}{\kappa r} b \right) t,$$

$$\omega_2 = -\kappa, \quad \omega_1 = m\Omega - \omega, \quad \Omega' = \frac{d\Omega}{dr}, \quad b = \frac{2 + a^2}{6ar}\frac{d\ln\kappa}{d\ln r} - \frac{1 - a^2}{2ar},$$

(14) $$v_\perp = v_{\perp 0} + v_{\perp g},$$

$$v_{\perp g} = \frac{v_\perp}{2r\omega_1}\Big[\frac{ma}{2\kappa}\frac{d\ln\Omega}{d\ln r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{3B}{4}\frac{ma\Psi}{\kappa r} - \frac{r}{\kappa^2}\left(\frac{d\omega_1}{dr}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{d\omega_2}{dr}\frac{ma\Psi}{r} \right) -$$

$$-\frac{3B}{8(\omega_1^2 - \omega_2^2)r} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\omega_1 - \frac{ma\Psi}{r}\omega_2 \right)\Big] \cos(m\varphi - \omega t) -$$

$$-\frac{1}{8v_\perp(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{am\Psi}{r} \right)^2 \right] \cos 2(m\varphi - \omega t);$$

(15) $$\alpha = \alpha_0 - (\kappa + \kappa_1 + \kappa_g)t, \quad \kappa^2 = 2\Omega(2\Omega + r\frac{d\Omega}{dr}),$$

$$\kappa_1 = \frac{v_\perp^2}{8\kappa r^2} \left\{ \frac{d}{d\ln r} \left(\frac{d\ln\kappa}{d\ln r} \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{d\ln\kappa}{d\ln r} \right)^2 + 2 \left(\frac{d\ln\kappa}{d\ln r} \right) \right\},$$

$$\kappa_g = \Big\{\frac{1}{2\kappa} \left[\left(\frac{B}{2} - \frac{1}{a^2} + 1 \right) \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{d\ln\kappa}{dr}\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{am\Psi}{r}\frac{\omega_1}{\kappa}\frac{\partial\ln\omega_1}{\partial r} - \Delta\Psi \right] +$$

$$+\frac{\partial\kappa}{\partial r}\delta r_g - \frac{\left(\frac{B}{4r} - \frac{1}{a^2 r} \right)}{(m\Omega - \omega)^2 - \kappa^2} \left(\frac{am\Psi}{r}(m\Omega - \omega) + \frac{\partial\Psi}{\partial r}\kappa \right) \Big\} \cos(m\varphi - \omega t),$$

$$a = \frac{2\Omega}{\kappa}, \quad B = \frac{1}{a^2} - 1 + \frac{d\ln a}{d\ln r},$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ - оператор Лапласа.

В формулах (12)-(15) в правых частях выражений $r = r_0$, так как $\frac{d\bar r}{dt} = 0$. $\bar r = R_1$ в обозначениях Линдблада [3], который исследовал только свободные эпициклические колебания. Метод усреднения, таким образом, последовательно учел, во-первых, что орбита центра колебаний отличается от r_0 на $\delta r^{(2)}$. Во-вторых, что на усредненной орбите частица имеет тот же угловой момент, что и на первоначальной. Вынужденные гравитационные колебания с фазой χ совпадают с ранее найденными Лином и Лау [4] в гидродинамическом приближении.

Решения (12)-(15) непригодны в случае резонансов, когда малые знаменатели приводят к расходимости асимптотических разложений. В случае резонансов двухчастотная схема усреднения может быть сведена к одночастотной [5,6] введением линейной комбинации частот, обращающейся в ноль на рассматриваемом резонансе, что соответствует выбору в качестве новой "медленной" переменной суммы или разности фаз вынужденных и эпициклических колебаний звезд в линдбладовских резонансах (в случае резонанса коротации - это просто фаза вынужденных колебаний). Кроме того, так как "гибридные" колебания под действием гравитационного поля становятся дрейфовыми, $\frac{dr}{dt} \neq 0$ и в правых частях выражений (12)-(15) стоят уже не r_0, $v_{\perp 0}$, а их усредненные значения $\bar{r}$ и $\bar{v}_\perp$, которые находятся как решения системы. Таким образом, наши выражения, найденные методом усреднения, для резонансного случая дополняются системой уравнений для определения усредненных координат. Свободные колебания в этом случае не изменяются, оставаясь такими же, как и в нерезонансных случаях, но в амплитуды уже надо подставлять усредненные значения координат и скоростей.

Рассмотрим резонанс коротации. На радиусе коротации частота вынужденных колебаний $\omega_1 \to 0$. Поэтому вынужденные слагаемые приобретают вид:

$$\delta r_g = \frac{a}{\kappa r}\int \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} dt, \tag{16}$$

$$\delta \varphi_g = -\frac{1}{a\kappa r}\int \frac{\partial \Psi}{\partial r} dt, \tag{17}$$

$$v_{\perp g} = \frac{v_\perp a}{2\kappa r}\int \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{d\ln\kappa}{dr}\Psi + \frac{1-a^2}{a^2}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right] dt, \tag{18}$$

$$\alpha_g = -\int \frac{1}{2\kappa}\left[\frac{d\ln\kappa}{dr}\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \Delta\Psi + \left(\frac{B}{2} - \frac{1}{a^2} + 1\right)\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right] dt. \tag{19}$$

Усредненные значения координат и скоростей, согласно (16)-(19), определяются в отличие от нерезонансного случая следующим образом: $\bar{r} = r_0 + \delta r_g$; $\bar{\varphi} = \varphi_0 + \Omega t + \delta\varphi_g$ и т.д. Эти соотношения являются интегральными уравнениями Вольтерра, которые всегда имеют решения. Их решения нужно подставить в амплитуды свободных колебаний, чтобы получить окончательное решение задачи.

Формулы (12)-(15) и (16)-(19) содержат аналитические результаты построенной нами асимптотической теории квазипериодических движений звезд в области диска, ограниченной радиусами внутреннего и внешнего линдбладовских резонансов, не включая их. Можно показать, что при приближении к коротационному резонансу вынужденные слагаемые (12)-(15) имеют своим пределом выражения (16)-(19), то есть гладко сшиваются с последними при $\omega_1 \to 0$ [7]. Таким образом, решение в области $r_{ILR} < r < r_{OLR}$ (ILR - внутренний линдбладовский резонанс,

OLR - внешний линдбладовский резонанс) является непрерывным. Эти результаты сохраняют силу при значениях амплитуды возмущающего поля, не нарушающих применимость метода усреднения [7,8].

Следует отметить, что вынужденные слагаемые (то есть члены, содержащие гравитационный потенциал) получаются как колебания второго порядка после усреднения по α. Поскольку возмущающее поле отсутствует в начальных уравнениях для r и φ, то вынужденные эффекты появляются через взаимосвязь колебаний координат и скоростей частиц, которая проявляется в определяющих уравнениях в более высоком порядке разложения по малому параметру. Эти колебания найдены в общем виде методом усреднения впервые в работе [1], и, применяя общий метод усреднения для конкретной физической задачи, в данной работе.

Институт астрофизики
Академии наук Республики Таджикистан Поступило 21 IX 1992

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванникова Е.И., Максумов М.Н. Метод усреднения в двухчастотной динамической системе. - Изв. АН РТ. Отд.физ.-мат. и хим.наук АН Республики Таджикистан, 1992, N 4.

2. Иванникова Е.И., Максумов М.Н. - Докл. АН ТаджССР, 1985, т. 28, N 11, с. 631-634.

3. Линдблад Б. - В кн.: Строение звездных систем. - М.: ИЛ, 1962, 83 с.

4. Lin C.C., Lau Y.Y. - Studies in applied mathematics, 1979, v. 60, N 2, p. 97-163.

5. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. - М.: Наука, 1977.

6. Волосов В.М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебаний. - М.: Изд-во МГУ, 1971, 431 с.

7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. - М.: Высшая школа, 1988, 184 с.

8. Хапаев М.М. Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. - М.: Высшая школа, 1988, 184 с.

Е.И.ИВАННИКОВА, М.Н.МАХСУМОВ

ДАР БОРАИ ҲАРАКОТИ КВАЗИПЕРИОДИКИИ СИТОРАҲО ДАР ҚУРСИ ДОРОИ БАРИ ГАРДОН

Реҷаи умумии миёнагардонии муодилаҳои тавсирдиҳандаи ҳаракати ситораҳо барои бунёд кардани назарияи асимптотикии ҳаракатҳои ситораҳои ҷудогона дар қурси ба гаврн дифференсиалӣ гардишхӯрандае истифода шудааст, ки он бар (яъне ташкилаи қутрии дукшакли дар ҳамвории қурс гардишхӯранда) дорад ва басомади чархиши он аз чархиши қурс фарқ мекунад. Ҷунбиши ситораҳо бо услуби миёнагардонӣ бо саҳеҳияти то ба тартиби дуюми параметри хурдият (нисбат ба бузургии чаппаи басомади эписиклӣ) бо мақсади ҳосил кардани ларзишҳои маҷбурӣ аввалин бор ҳисобу китоб шудааст. Ларзишҳои озодонаи дорои басомади дучандаи эписиклӣ сабабгори лағзиши маркази ларзиш

мегардад, ки ин сабаби дифференсиалӣ будани чархиш ба дрейф (сайр)-и ситора асар дорад. Ифодаҳои барои координатҳо ва ҷузъҳои суръати ҳаракати ситора ҳосилкардаи мо барои қисмҳои ғайрирезонансии қурси ситоравӣ ва резонанси коротатсия (яъне баробар омадани басомадҳои чархиши қурс ва бар) кор мебаранд.