АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1994, том 71, № 2, с. 216 - 219

УДК 524.3/4-32+524.6+524.7

К ТЕОРИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ЗВЕЗД В ДИСКЕ С ВРАЩАЮЩИМСЯ БАРОМ

© 1994 г. Е. И. Иванникова, М. Н. Максумов
Институт астрофизики, Душанбе, Таджикистан
Поступила в редакцию 27.08.92 г.

Общая схема усреднения применена для построения асимптотической теории движения отдельных звезд в дифференциально вращающемся диске с баром, частота вращения которого отлична от частоты вращения диска. Впервые колебательные движения звезд рассчитаны методом усреднения с точностью до 2-го порядка малости включительно по обратной эпициклической частоте, чтобы получить и вынужденные колебания. Свободные колебания с удвоенной эпициклической частотой обусловливают сдвиг центра колебаний, что влияет на дрейф из-за дифференциальности вращения. Найденные выражения для координат и скоростей звезды пригодны в нерезонансных областях диска и в резонансе коротации.

Для исследования динамики звездных дисков (галактик) необходимо знание движения отдельных звезд в них, причем решение требуется в аналитической форме в полном фазовом описании – в конфигурационном пространстве и пространстве скоростей. При наличии в диске неосесимметричных вращающихся возмущающих гравитационных полей (от бара, спиральной волны плотности и т. п.) к эпициклическим колебаниям звезд (с одной частотой) добавляются вынужденные колебания (с другой частотой). Как правило, и остаточные скорости звезд, вызывающие эпициклические движения, и возмущающие поля малы по сравнению с круговой скоростью движения в поле основного фонового потенциала. Все это позволяет с успехом применять асимптотический подход и метод усреднения [1]. Большие остаточные скорости и сильные возмущающие поля ведут к хаотизации движения, делают невозможными квазипериодические движения звезд, для которых и так ситуация осложнена резонансами и дифференциальностью вращения [1 - 4].

В данной работе, используя общую теорию, развитую на основе метода усреднения для двухчастотной вращающейся динамической системы [5], исследуются орбитальное движение звезды и изменение ее остаточных скоростей в дисковой дифференциально вращающейся галактике в нерезонансных областях. Это решение гладко сшивается с решением в коротационной области (где скорость движения частицы совпадает со скоростью вращения бара), найденным авторами ранее [6], описывая, таким образом, движение частицы во всем галактическом диске, за исключением линдбладовских резонансов.

В качестве исходных используем уравнения движения звезд в диске с анизотропным (шарцшильдовским) распределением по скоростям [6], в которых круговое и некруговое движения разделены:

$$dr/dt = v_\perp \cos\alpha, \tag{1}$$

$$d\varphi/dt = \Omega + \frac{v_\perp}{ar}\sin\alpha, \tag{2}$$

$$dv_\perp/dt = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{v_\perp^2 B}{4r}\right)\cos\alpha + \frac{a}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\sin\alpha - \frac{v_\perp^2 B}{4r}\cos 3\alpha, \tag{3}$$

$$d\alpha/dt = -\kappa + \frac{a}{v_\perp r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\cos\alpha - \left(\frac{1}{v_\perp}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{v_\perp}{a^2 r} - \frac{v_\perp B}{4r}\right)\sin\alpha + \frac{v_\perp B}{4r}\sin 3\alpha. \tag{4}$$

Здесь r, φ – цилиндрические координаты в галактоцентрической системе отсчета (ось Z совпадает с осью вращения диска), $\Omega(r)$ – угловая скорость вращения, $\kappa^2 = [2\Omega(2\Omega + r\partial\Omega/\partial r)]$ – эпициклическая частота,

$$v_\perp^2 = (v_r^2 + v_\varphi'^2), \quad \alpha = \mathrm{arctg}(v_\varphi'/v_r), \tag{5}$$

где $v_\varphi' = (2\Omega/\kappa)v_\varphi$, а v_φ, v_r – остаточные азимутальная и радиальная скорости соответственно, $a = 2\Omega/\kappa$, $B = a^{-2} - 1 + r(d\ln a/dr)$, ψ – редуцированный гравитационный потенциал (из которого вычтена часть, скомпенсированная вращением). Это удобно, если (как это имеет место в нашем случае) орбитальное движение звезды мало отличается от кругового. Некруговое же движение звезд в начальный момент представлено тогда (при отсутствии возмущения) свободными эпициклическими колебаниями.

Выберем ψ в виде

$$\psi = \psi(r)\cos(m\varphi - \omega t), \tag{6}$$

что соответствует случаю бара или спутника ($m = 1, 2, \ldots$, ω – частота изменения поля бара).

Вводя для вынужденных колебаний новую фазу $\chi = m\varphi - \omega t$ или $\dot\chi = m\Omega - \omega$, с учетом вида потенциала (6) перепишем уравнения (1) - (4) в виде:

$$\frac{dr}{dt} = \bar{X}^1_{01}(e^{i\alpha} + \text{к. с.}), \tag{7}$$

$$\frac{d\chi}{dt} = A^1_{00} + i\bar{\bar{A}}^1_{01}(e^{i\alpha} - \text{к. с.}), \tag{8}$$

$$\frac{dv_\perp}{dt} = \bar{X}^2_{01}(e^{i\alpha} + \text{к. с.}) + \bar{X}^2_{03}(e^{3i\alpha} + \text{к. с.}) + $$
$$+ \bar{X}^2_{11}(e^{i(\alpha+\chi)} + \text{к. с.}) + \bar{X}^2_{1,-1}(e^{i(\alpha-\chi)} + \text{к. с.}), \tag{9}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = A^2_{00} + i\bar{\bar{A}}^2_{01}(e^{i\alpha} - \text{к. с.}) + i\bar{\bar{A}}^2_{03}(e^{3i\alpha} - \text{к. с.}) + $$
$$+ i\bar{\bar{A}}_{11}{}^2(e^{i(\alpha+\chi)} - \text{к. с.}) - i\bar{\bar{A}}^2_{1,-1}(e^{i(\alpha-\chi)} - \text{к. с.}). \tag{10}$$

Здесь

$$\bar{X}^1_{01} = \bar{X}^1_{0,-1} = \frac{v_\perp}{2}, \qquad A^1_{00} = m\Omega - \omega, \quad A^2_{00} = -\kappa,$$

$$\bar{X}^2_{01} = \bar{X}^2_{0,-1} = \frac{v_\perp^2 B}{8r}, \qquad \bar{\bar{A}}^1_{01} = -\bar{\bar{A}}^1_{0,-1} = -\frac{mv_\perp}{2ar},$$

$$\bar{X}^2_{03} = \bar{X}^2_{0,-3} = -\frac{v_\perp^2 B}{8r}, \qquad \bar{\bar{A}}^2_{01} = -\bar{\bar{A}}^2_{0,-1} = \frac{v_\perp}{2a^2 r} - \frac{v_\perp B}{8r},$$

$$\bar{X}^2_{11} = \frac{1}{4}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{ma\psi}{4r}, \qquad \bar{\bar{A}}^2_{03} = \bar{\bar{A}}^2_{0,-3} = -\frac{v_\perp B}{8r}, \tag{11}$$

$$\bar{X}^2_{1,-1} = \frac{1}{4}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{ma\psi}{4r}, \qquad \bar{\bar{A}}^2_{11} = \frac{1}{4v_\perp}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{ma\psi}{4v_\perp r},$$

$$\bar{\bar{A}}^2_{1,-1} = -\frac{1}{4v_\perp}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{ma\psi}{4v_\perp r}$$

– конкретизированный вид фурье-компонент, соответствующих разложениям (6), (7) и (16), (17) работы [5], где

$$\bar{X}^k_{pn} = (a^k_{pn} - d^k_{pn})\cdot\frac{\lambda_{pn}}{4}, \qquad \bar{\bar{X}}^k_{pn} = (-b^k_{pn} - c^k_{pn})\cdot\frac{\lambda_{pn}}{4},$$

$$\bar{X}^k_{p,-n} = (a^k_{p,-n} + d^k_{pn})\cdot\frac{\lambda_{pn}}{4}, \qquad \bar{\bar{X}}^k_{p,-n} = (-b^k_{p,-n} + c^k_{pn})\cdot\frac{\lambda_{pn}}{4}$$

и аналогично для $\bar{A}^k_{pn}$ и $\bar{\bar{A}}^k_{pn}$.

В результате подстановки (11) в конечные формулы (18) - (23) статьи [5] получим для нерезонансной области следующие выражения для координат и скоростей звезды:

$$r = r_0 + \delta r^{(2)} - \delta r^{(1)}\sin\alpha + \delta r^{(2)}\cos 2\alpha + \delta r_g, \tag{12}$$

$$\delta r_g = -\frac{\cos(m\varphi - \omega t)}{(m\Omega - \omega)^2 - \kappa^2}\times$$
$$\times\left(\frac{am\psi}{r}\kappa + \frac{\partial\psi}{\partial r}(m\Omega - \omega)\right)\frac{1}{m\Omega - \omega},$$

$$\delta r^{(1)} = \frac{v_\perp}{\kappa}, \quad \delta r^{(2)} = \frac{v_\perp^2}{4\kappa^2 r}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{d\ln\kappa}{d\ln r}\right),$$

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi^{(1)}\cos\alpha + \delta\varphi^{(2)}\sin 2\alpha +$$
$$+ \delta\varphi_d + \delta\varphi_g\sin(m\varphi - \omega t), \tag{13}$$

$$\delta\varphi^{(1)} = \frac{av_\perp}{\kappa r}, \quad \delta\varphi^{(2)} = \frac{av_\perp^2}{4\kappa^2 r^2}\left(-\frac{1}{3}\frac{d\ln\kappa}{d\ln r} + 2\right),$$

$$\delta\varphi_g =$$
$$= \left\{\frac{2\Omega\frac{\partial\psi}{\partial r}}{r(m\Omega - \omega)(\omega_1^2 - \omega_2^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\frac{am\psi}{r}[(m\Omega - \omega)^2 - 2r\Omega\Omega']}{r(m\Omega - \omega)^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\right\},$$

$$\delta\varphi_d = \left(\Omega + \frac{v_\perp^2}{\kappa r}b\right)t,$$

$$\omega_2 = -\kappa, \quad \omega_1 = m\Omega - \omega, \quad \Omega' = \frac{d\Omega}{dr},$$

$$b = \frac{2 + a^2}{6ar}\frac{d\ln\kappa}{d\ln r} - \frac{1 - a^2}{2ar},$$

$$v_\perp = v_{\perp 0} + v_{\perp g}, \tag{14}$$

$$v_{\perp g} = \frac{v_\perp}{2r\omega_1}\left[\frac{ma}{2\kappa}\frac{d\ln\Omega}{d\ln r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{3B}{4}\frac{ma\psi}{\kappa r} - \right.$$
$$- \frac{r}{\kappa^2}\left(\frac{d\omega_1}{dr}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{d\omega_2}{dr}\frac{ma\psi}{r}\right) -$$
$$\left. - \frac{3B}{8(\omega_1^2 - \omega_2^2)r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\omega_1 - \frac{ma\psi}{r}\omega_2\right)\right]\cos(m\varphi - \omega t) -$$
$$- \frac{1}{8v_\perp(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{am\psi}{r}\right)^2\right]\cos 2(m\varphi - \omega t),$$

$$\alpha = \alpha_0 - (\kappa + \kappa_1 + \kappa_g)t, \quad \kappa^2 = 2\Omega\left(2\Omega + r\frac{d\Omega}{dr}\right),$$

$$\kappa_1 = \frac{v_\perp^2}{8\kappa r^2}\left\{\frac{d}{d\ln r}\left(\frac{d\ln\kappa}{d\ln r}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{d\ln\kappa}{d\ln r}\right)^2 + 2\left(\frac{d\ln\kappa}{d\ln r}\right)\right\},$$

$$\kappa_g = \left\{ \frac{1}{2\kappa}\left[\left(\frac{B}{2} - \frac{1}{a^2} + 1\right)\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{d\ln\kappa}{dr}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{am\psi}{r}\frac{\omega_1}{\kappa}\frac{\partial\ln\omega_1}{\partial r} - \Delta\psi\right] +$$
$$+ \frac{\partial\kappa}{\partial r}\delta r_g - \frac{\left(\frac{B}{4r} - \frac{1}{a^2 r}\right)}{(m\Omega - \omega)^2 - \kappa^2} \times \tag{15}$$
$$\left. \times \left(\frac{am\psi}{r}(m\Omega - \omega) + \frac{\partial\psi}{\partial r}\kappa \right)\right\} \cos(m\varphi - \omega t),$$
$$a = \frac{2\Omega}{\kappa}, \quad B = \frac{1}{a^2} - 1 + \frac{d\ln a}{d\ln r},$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \text{оператор Лапласа.}$$

В формулах (12) - (15) в правых частях выражений $r = r_0$, так как $d\bar{r}/dt = 0$.

В обозначениях Линдблада [7] $\bar{r} = R_1$. Метод усреднения, таким образом, последовательно учел, что колебания происходят вокруг орбиты центра колебаний, которая отличается от r_0 на $\delta r^{(2)}$.

В отличие от работы [6], в которой гравитационное возмущение считалось медленным, здесь члены с гравитационным потенциалом отнесены уже не к дрейфовым слагаемым, а к осциллирующим, поскольку условие медленности (по сравнению с κ, Ω) изменения потенциала не выполняется: потенциал изменяется со сравнимой частотой. В результате снятия вырождения, которое имело место на резонансе коротации, в r- и φ-компонентах звездных движений появляются одноименные (совпадающие с направлением этих компонент) вынужденные гравитационные колебания. Эти полевые слагаемые совпадают с аналогичными слагаемыми в решениях уравнений движения в лагранжевом описании Лина и Лау [8]. Амплитуды свободных колебаний по r и φ для предельных случаев кеплеровского ($a = 2$) и твердотельного ($a = 1$) вращений в точности равны найденным Линдбладом [7] для этих случаев. Дрейф по углам φ и α, связанный с дифференциальностью вращения, остается таким же, как и в работе [6], поскольку он не зависит от возмущающего поля и определяется только законом вращения. Значения постоянного смещения $\delta r^{(2)}$, которое в разработанном авторами методе [5] найдено как нулевая гармоника у колебаний второго порядка $\xi_{k,0}^{(2)}$ с удвоенной эпициклической частотой, обращает (как и должно быть) в нуль дрейф по φ (или α) для кеплеровского закона вращения. Таким же образом определялась орбита с замкнутым эпициклом у Линдблада [7], и этот сдвиг совпадает при кеплеровском и твердотельном вращениях с нашим $\delta r^{(2)}$. В первом приближении методом усреднения он не определяется.

Выражения (12) - (15) – асимптотические решения системы (1) - (4) для координат и скоростей с точностью до второго порядка, определяемые через их усредненные значения [1]. Первоначально быстрые колебания с разными частотами были связаны друг с другом. Усреднение приводит к расщеплению колебаний по φ и α, т.е. отделению свободных колебаний (описываемых переменной α) от вынужденных, под действием гравитационного поля (изменяющегося по φ), что значительно упрощает физическую картину. Чисто гидродинамические члены – это вынужденные колебания с фазой ($m\varphi - \omega t$) плюс дрейф из-за дифференциальности вращения. Вынужденные гравитационные колебания совпадают с ранее найденными Лином и Лау [8].

Решения (12) - (15) непригодны в случае резонансов, когда малые знаменатели приводят к расходимости асимптотических разложений. В случае резонансов двухчастотная схема усреднения может быть сведена к одночастотной [2, 3] введением линейной комбинации частот, обращающейся в нуль на рассматриваемом резонансе, что соответствует выбору, в качестве новой “медленной” переменной, суммы или разности фаз вынужденных и эпициклических колебаний звезд в линдбладовских резонансах (в случае резонанса коротации – это просто фаза вынужденных колебаний). Кроме того, так как “гибридные” колебания под действием гравитационного поля становятся дрейфовыми, $dr/dt \neq 0$ и в правых частях выражений (12) - (15) стоят уже не r_0, $v_{\perp 0}$, а их усредненные значения $\bar{r}$ и $\bar{v}_\perp$, которые находятся как решения системы. Таким образом, наши выражения, найденные методом усреднения, для резонансного случая дополняются системой уравнений для определения усредненных координат. Свободные колебания в этом случае не изменяются, оставаясь такими же, как и в нерезонансных случаях, но в амплитуды уже надо подставлять усредненные значения координат и скоростей.

Рассмотрим резонанс коротации. На радиусе коротации частота вынужденных колебаний $\omega_1 \to 0$. Поэтому вынужденные слагаемые приобретают вид:

$$\delta r_g = \int \frac{a}{\kappa r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}dt, \tag{16}$$

$$\delta\varphi_g = -\frac{1}{a\kappa r}\int\frac{\partial\psi}{\partial r}dt, \tag{17}$$

$$v_{\perp g} = \frac{v_\perp a}{2\kappa r}\int\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{d\ln\kappa}{dr}\psi + \frac{1-a^2}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]dt, \tag{18}$$

$$\alpha_g = $$
$$= -\int \frac{1}{2\kappa}\left[\frac{d\ln\kappa}{dr}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \Delta\psi + \left(\frac{B}{2} - \frac{1}{a^2} + 1\right)\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]dt. \qquad (19)$$

Усредненные значения координат и скоростей согласно (16) - (19) определяются в отличие от нерезонансного случая следующим образом: $\bar{r} = r_0 + \delta r^{(2)} + \delta r_g$; $\bar{\varphi} = \varphi_0 + \Omega t + \delta\varphi_g$ и т.д. Эти соотношения, строго говоря, являются интегральными уравнениями типа Вольтерра, которые всегда имеют решения. Их решения нужно подставить в амплитуды свободных колебаний, чтобы получить окончательное решение задачи.

Формулы (12) - (15) и (16) - (19) содержат аналитические результаты построенной нами асимптотической теории квазипериодических движений звезд в области диска, ограниченной радиусами внутреннего и внешнего линдбладовских резонансов, не включая их. Можно показать, что при приближении к коротационному резонансу вынужденные слагаемые (12) - (15) имеют своим пределом выражения (16) - (19), т.е. гладко сшиваются с последними при $\omega_1 \to 0$ [5]. Таким образом, решение в области $r_{\rm ILR} < r < r_{\rm OLR}$ (ILR – внутренний линдбладовский резонанс, OLR – внешний линдбладовский резонанс) является непрерывным. Эти результаты сохраняют силу при значениях амплитуды возмущающего поля, не нарушающих применимость метода усреднения [1, 9].

Следует отметить, что вынужденные слагаемые (члены, содержащие гравитационный потенциал) получаются как колебания второго порядка после усреднения по α. Поскольку возмущающее поле отсутствует в начальных уравнениях для r и φ, то вынужденные эффекты появляются через взаимосвязь колебаний координат и скоростей частиц, которая проявляется в определяющих уравнениях в более высоком порядке разложения по малому параметру. Эти колебания найдены в общем виде методом усреднения впервые в работе [5] и, применяя общий метод усреднения для конкретной физической задачи, – в данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. С. 394.
2. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. Изд. 2-е. М.: Наука, 1977. 430 с.
3. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебаний. М.: Изд-во МГУ, 1971. 431 с.
4. *Гребеников Е.А.* Метод усреднечия в прикладных задачах. М.: Наука, 1986. 256 с.
5. *Иванникова Е.И., Максумов М.Н.* Изв. Акад. наук Респ. Таджикистан. Отд. физ., мат. и хим. наук. 1992. № 4(4). С. 32.
6. *Иванникова Е.И., Максумов М.Н.* // Докл. АН ТаджССР. 1985. Т. 28. С. 631.
7. *Линдблад Б.* // Строение звездных систем. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 83.
8. *Lin C.C., Lau Y.Y.* // Studies appl. math. 1979. V. 60. P. 97.
9. *Хапаев М.М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высш. шк., 1988. 184 с.

ON THE THEORY OF QUASI-PERIODIC STAR MOTIONS IN A DISK WITH A ROTATING BAR

E. I. Ivannikova and M. N. Maksumov

The general technique of averaging was applied to build an asymptotic theory of individual star motion in a differentially rotating disk with a bar. The rotation frequency of the bar can differ from that of the disk. Oscillating star motions were calculated for the first time by the averaging method with an accuracy to the second-order infinitesimal in the inverse epicyclic frequency in order to obtain the forced oscillating motions as well. Free oscillations with the doubled epicyclic frequency result in a shift of the oscillation center thereby affecting the drift due to the differential rotation. The obtained expressions for coordinates and velocity components of a star are applicable in the non-resonant regions of a disk and in the corotation resonance zone.